

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

МОНОГРАФИЯ

А.А. Дубанов

Москва

РИОР

УДК 51-74
ББК 22.151.3
Д79

Автор:

Дубанов А.А. — кандидат технических наук, доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики, Институт математики и информатики Бурятского государственного университета им. Доржи Банзарова (г. Улан-Удэ)

Рецензенты:

Аюшеев Т.В. — доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой инженерной и компьютерной графики, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (г. Улан-Удэ);

Заятуев Б.В. — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой геометрии и методики преподавания математики, Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова (г. Улан-Удэ)

Дубанов А.А.

Д79 Компьютерное моделирование в задачах преследования: монография [Электронный ресурс]. — Москва: РИОР, 2023. — 161 с. — DOI: <https://doi.org/10.29039/02102-6>

ISBN 978-5-369-02102-6

В данной монографии публикуется описание методов и алгоритмов задач преследования на поверхностях. Произведено моделирование задач в среде программирования MathCAD. Развитие цифровых технологий позволяет производить моделирование разнообразных задач из теории дифференциальных игр. В результате компьютерного моделирования было получено множество анимационных роликов, которые позволяют увидеть предлагаемые автором алгоритмические решения в задачах преследования.

Монография может быть полезна студентам технических вузов, аспирантам и разработчикам робототехнических комплексов с элементами искусственного интеллекта.

Издается в авторской редакции

Д79
УДК 51-74
ББК 22.151.3

© Дубанов А.А.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ, В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПОВЕРХНОСТЯХ.....	7
1.1. Геометрическая модель метода параллельного сближения	11
на плоскости	11
1.2. Геометрическая модель метода параллельного сближения	15
в пространстве	15
1.3. Геометрическая модель метода параллельного сближения	16
на поверхности	16
1.4. Геометрическая модель метода погони в пространстве	17
и на плоскости	17
1.5. Геометрическая модель метода погони на поверхности	19
1.6. Геометрическая модель метода пропорционального сближения	22
1.7. Геометрическая модель трех точечного метода сближения	25
1.8. Геометрическая модель уклонения цели	26
1.9. Геометрические модели группового преследования.....	37
1.9.1. Геометрическая модель преследования одиночной цели согласованной группой.....	37
1.9.2. Геометрическая модель группового преследования множеств целей	41
ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 1	42
ГЛАВА 2. ФОРМАЛИЗОВАННОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ.....	44
2.1. Основная модель описания динамических объектов при преследовании в пространстве	44
2.2. Частный случай описания динамических объектов при преследовании на поверхности	49
2.3. Частный случай описания динамических объектов при преследовании на плоскости	52

2.4. Некоторые видоизменения основной модели	55
ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 2	56
ГЛАВА 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ	58
3.1. Модифицированные модели преследования объектов при параллельном сближении	58
3.1.1. Модель модификации метода параллельного сближения на поверхности	73
3.1.2. Модель стремления к плоскости движения цели при параллельном сближении	78
3.2. Модифицированная модель преследования объектов методом погони .	88
3.2.1. Модель преследования методом погони на поверхности.....	99
3.3. Модели группового преследования объектов.....	107
3.3.1. Модель группового преследования одиночной цели с различными стратегиями.....	108
3.3.2. Модель преследования цели группой с жесткими связями	115
3.3.3. Модели группового преследования нескольких целей с временными критериями достижения.....	118
3.4. Модель коррекции траектории движения преследователя в пространстве при стремлении к параллельному сближению.....	127
3.5. Расчет параметров параллельного сближения на основе многофакторного анализа.....	136
ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 3	147
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	148
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	150

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время особый статус имеет компьютерное моделирование в системах виртуальной реальности. Для того, чтобы компьютерная модель отвечала требованиям задач, которые она моделирует, необходимо, чтобы математический аппарат корректно описывал моделируемые явления.

В данной монографии производится моделирование задач преследования. Производится адаптивное моделирование поведения, как преследователей, так и целей. Производится итерационный расчет траекторий участников задачи преследования.

Основное внимание уделяется методам погони и параллельного сближения. Данные методы взяты за основу исследования и модифицируются в дальнейшем.

Научную новизну исследования составляет итерационный расчет траекторий участников задачи преследования при совершении движения с постоянной скоростью, следуя при этом прогнозируемым траекториям.

Прогнозируемые траектории образуют однопараметрическую сеть непрерывных линий первого порядка гладкости. Прогнозируемые траектории рассчитываются с учетом ограничений по кривизне участника задачи преследования.

Факт ограничений по кривизне можно трактовать как ограничения по угловой частоте вращения объекта задачи преследования.

Также новизну составляет расчет итерационного процесса группового преследования множества целей, когда цели поражаются одновременно или в заданные промежутки времени. Расчет параметров сети прогнозируемых траекторий производится с вариацией кривизны для достижения нужного временного эффекта.

Также в работе производится моделирование адаптивного поведения преследователя и цели. Принцип поведения можно выразить на примере преследо-

вателя простой фразой: «Ты налево — я налево». Так происходит на каждом шаге итерации в плане выбора направления вращения. Для цели принцип адаптивного поведения выражается фразой: «Ты налево — я направо».

Исследования, алгоритмы и модели, изложенные в монографии, могут быть востребованы при проектировании беспилотных летательных аппаратов с автономным управлением с элементами искусственного интеллекта.

Модели задач в монографии дополнены множеством анимированных изображений, где можно будет посмотреть процесс исследования.

Также задачи имеют реализацию в системе компьютерной математики и могут быть перенесены в системы виртуальной реальности при необходимости.

ГЛАВА 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЗАДАЧ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ, В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Задачи преследования являются частью теории дифференциальных игр. Задачи преследования имеют большое многообразие. Классификация задач преследования является условной. Для примера, рассмотрим классификацию задач преследования по признаку управляемости.

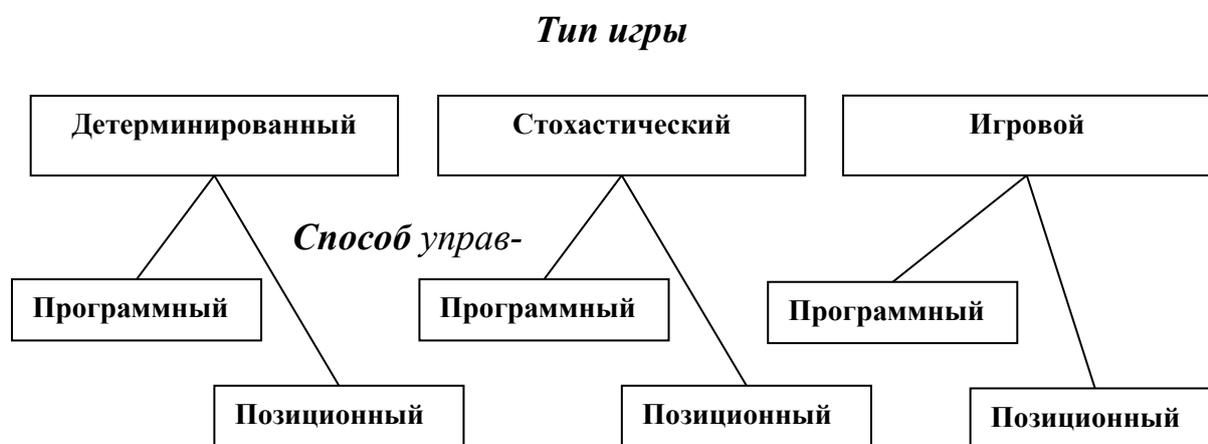


Рисунок 1.1 Классификация дифференциальных игр по признаку управляемости

Данная классификация предложена (Рисунок 1.1) в источнике [1] Красовским Н.Н. и Субботиным А.И. Детерминированный тип — это, когда результат полностью определяется выбором способа управления. Стохастический тип — это, когда при выбранном способе управления еще участвует в ходе получения результата случайное событие, имеющее статистическое описание. Игровой тип — это тип, при котором результат зависит от выбора управления и от случайного фактора, не имеющего вероятностного описания.

В программном случае управляющее воздействие является функцией времени. В позиционном случае, управляющие воздействия можно трактовать как

адаптивную реакцию участника игры на воздействия внешней для него среды. Между участниками игры существует адаптивная обратная связь.

В следующем примере, указанном в источнике [2], произведена классификация по признаку объединения в коалиции.

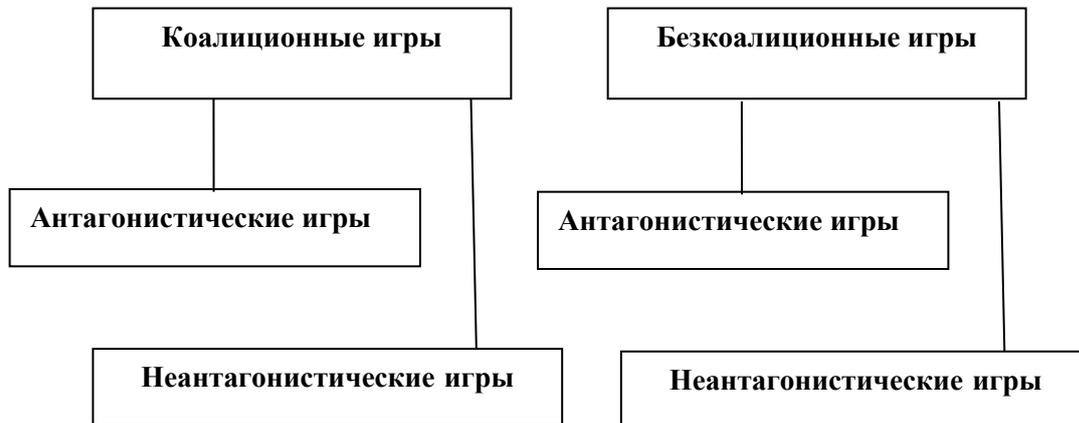


Рисунок 1.2 Классификация по признаку объединения в коалиции

Игры можно подразделять на коалиционные — безкоалиционные, на антагонистические — неантагонистические (Рисунок 1.2).

В коалиционной игре фазовые координаты участников, управления и стратегии зависят в одной коалиции по правилам, принятым в этой коалиции.

В безкоалиционной игре каждый участник принадлежит только одной коалиции.

Антагонистической называется та игра, в которой считается, что выигравшем одного является проигрыш другого.

В диссертационном исследовании будут рассматриваться задачи преследования, которые можно описать как антагонистические, коалиционные и безкоалиционные. По признаку управляемости задачи преследования, рассматриваемые в исследовании, можно охарактеризовать как детерминированные и позиционные.

В работе Пацко В.С., Туровой В.Л. [3] описаны модификации задачи «шофер-убийца», на основании которой можно сделать условную классификацию задач преследования.

Задача о «шофере-убийце» рассматривалась Р. Айзексом в работе [4] для описания дифференциальной игры с динамикой:

$$\begin{array}{l}
 \dot{x}_p = v_p \cdot \sin \theta \\
 P: \dot{y}_p = v_p \cdot \cos \theta \\
 \theta = \frac{v_p \cdot u}{R}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \dot{x}_e = v_1 \\
 E: \dot{y}_e = v_2 \\
 v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, |v| \leq \rho
 \end{array}
 \quad (1.1)$$

В формулах (1.1) положение преследователя P описывается координатами x_p, y_p , модуль скорости преследователя v_p , угол с осью координат θ , минимальный радиус кривизны R , управление преследователя u . Положение цели описывается координатами x_e, y_e , управление цели v .

В работе [3] выделены следующие задачи преследования:

- Задачи в постановке Р. Айзекса. Данные задачи описываются системой уравнений (1.1).
- Задачи Р. Айзекса, продолженные в исследованиях Дж. Бреквелла и Э. Мерца. Наиболее полно такое развитие показано в работах Э. Мерца [5, 6, 7]. В работе [7] двухпараметрическое множество параметров функции цены разделено на 20 подобластей линиями сингулярности (рассеивающие, универсальные, эквивокальные, фокальные). Для каждой из областей была исследована структура оптимальных движений и тип сингулярных линий.
- Игра сопровождения — уклонения. В работах Дж. Левина [8, 9, 10] цель старается как можно быстрее выйти из зоны обнаружения, а преследователь старается как можно дольше продержаться противника в этой области.
- Акустическая задача «шофер-убийца». П. Кардалиге, М. Квинкампуа, П. Сен-Пьер [11, 12] рассматривали вариант игры преследования, когда на управление цели накладывались ограничения, если расстояние между

целью и преследователем меньше заданной величины. Другими словами, на управление преследователя и цели может применяться иная стратегия, если расстояние меньше определенной величины

- Игры с усложненной динамикой «автомобиля». Здесь преследователь представлен как «автомобиль Дубинса», «автомобиль Ридса и Шеппа» [13, 14], «обобщенный автомобиль Дубинса» [15]. В «автомобиле Дубинса» динамика преследователя определяется системой дифференциальных уравнений (1.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= \omega \cdot \sin \theta \\ \dot{y}_p &= \omega \cdot \cos \theta \\ \dot{\theta} &= u, |u| \leq 1, |\omega| \leq 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

- Если в системе (1.2) преследователь может скачком изменять скорость до противоположного направления, то получаем «автомобиль Ридса и Шеппа». В «обобщенном автомобиле Дубинса» система (1.2) дополняется уравнением: $\dot{\omega} = v$, где v — дополнительный управляющий параметр.
- Игры преследования с оптимальными стратегиями. В этом пункте рассматриваются оптимальные стратегии по правилу экстремального прицеливания. Процедура построения оптимальной стратегии согласно Н.Н. Красовскому [1] включает в себя решение на максимум вспомогательной задачи по выбору программной стратегии движения игрока из определенной позиции.

Рассмотрим вопрос об оптимальных стратегиях отдельно. В работе [16] Л. С. Понтрягин сформировал принцип максимума. Решение по принципу максимума важно тогда, когда необходимо найти максимальное быстрое действие управляемой системы при минимальном расходе энергии, как пример.

В методе динамического программирования Беллмана [17] моделирования оптимальных траекторий на каждом шаге дискретного процесса оптимизации минимизируются рекуррентные уравнения Беллмана.

1.1. Геометрическая модель метода параллельного сближения на плоскости

Рассмотрим дискретную геометрическую модель параллельного сближения на плоскости, описанную Петросяном Л.А. в [2]. Данная модель описывает движение преследователя P при определенной траектории движения цели T .

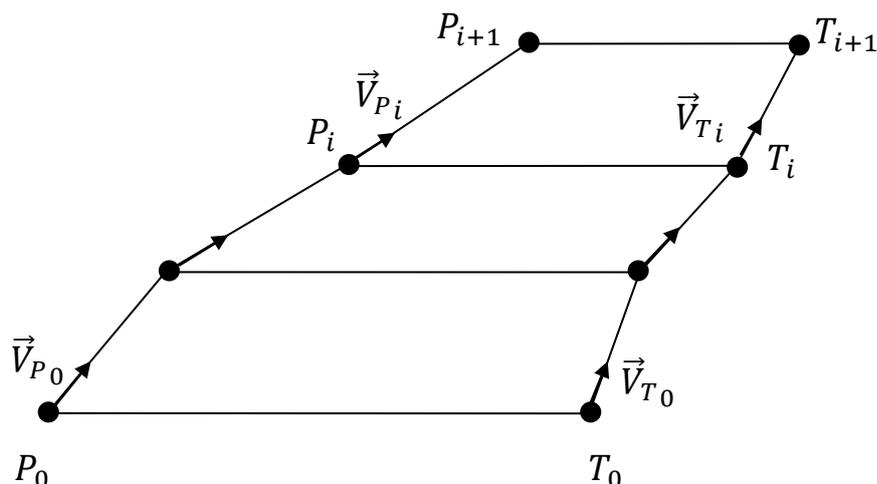


Рисунок 1.3 Параллельное сближение на плоскости

На рисунке 1.3 показано, что в момент времени t_i линия визирования ($P_i T_i$) остается параллельной линии визирования ($P_0 T_0$) в момент начала преследования. В дискретной модели, описанной в [2], модули скоростей преследователя и цели постоянны.

Положения точек преследователя P_0 и цели T_0 и вектор скорости цели \vec{V}_{T_0} в момент начала преследования определяют ход итерационного процесса в дискретной модели преследования.

Условие параллельности линии визирования, соединяющей преследователя P и цель T в произвольный момент времени t (Рисунок 1.4) сводится к тому, что векторы скоростей преследователя \vec{V}_P и цели \vec{V}_T направлены в точку K на окружности Аполлония.

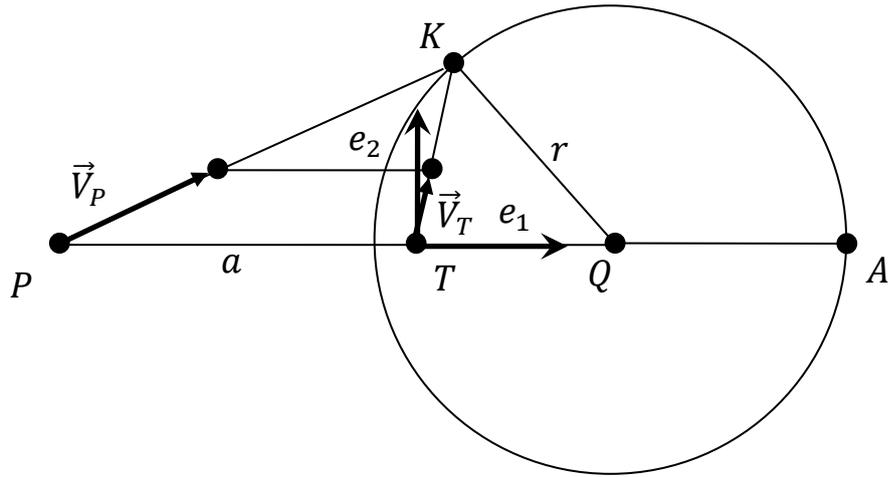


Рисунок 1.4 Окружность Аполлония в задаче преследования

Окружностью Аполлония называется геометрическое место точек плоскости, отношение расстояний до двух заданных точек есть величина постоянная, не равная единице.

Применительно к рисунку 1.4 это будет выглядеть так:

$$k = \frac{|PK|}{|TK|} = \frac{|\vec{V}_P|}{|\vec{V}_T|}. \quad (1.3)$$

Введем ортонормированную систему координат (e_1, e_2) с центром в точке T (Рисунок 1.4), вектор e_1 сонаправлен вектору PT . Пусть $K = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, а $P = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}$, где $a = |PT|$. Тогда $|TK| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|PK| = |K - P| = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$. Из (1.3) следует, что $|\vec{V}_T| \cdot \sqrt{(x + a)^2 + y^2} = |\vec{V}_P| \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$.

Введем обозначения $V_P = |\vec{V}_P|$, $V_T = |\vec{V}_T|$. После возведения в квадрат и раскрытия скобок получаем следующее уравнение:

$$\left(x - \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a \right)^2 + y^2 = \left(\frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a \right)^2.$$

Полученное уравнение в системе (e_1, e_2) с центром в точке T описывает окружность радиуса R и с центром в точке Q :

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a \\ 0 \end{bmatrix}, R = \frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a, a = |PT|.$$

Отметим одну характеристическую точку (Рисунок 1.4), называемой точкой Аполлония:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a + \frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для расчета точек траектории преследователя $\{P_i\}$ существует следующая итерационная схема.

Будем считать, что для нашего итерационного процесса известны начальные данные P_0 и T_0 . Скорости преследователя и цели постоянны и равны по модулю V_P и V_T , соответственно.

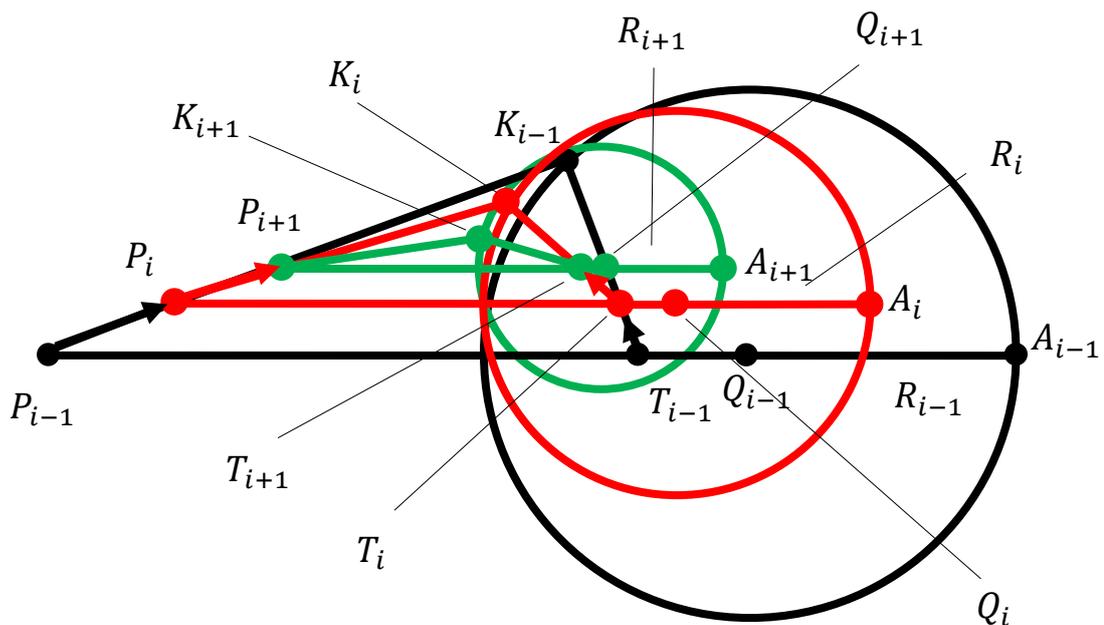


Рисунок 1.5 Итерационная схема

Траектория цели является предопределенной, поэтому мы сможем рассчитать массив точек $\{T_i\}$, где дистанция между точками T_i и T_{i+1} равна:

$$|T_{i+1} - T_i| = V_T \cdot \Delta t, \Delta t - \text{период дискретизации по времени.}$$

Итерационная схема расчета координат преследователя, координат центров окружностей Аполлония, радиусов окружностей Аполлония, характеристических точек представлена на рисунке 1.4.

Координаты преследователя на i — ом шаге итераций будут выглядеть следующим образом (1.4):

$$P_i = P_{i-1} + V_P \cdot \Delta t \cdot \frac{K_{i-1} - P_{i-1}}{|K_{i-1} - P_{i-1}|}. \quad (1.4)$$

Радиус окружности Аполлония:

$$R_i = \frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot |T_i - P_i|.$$

Центры окружностей Аполлония рассчитывается таким образом:

$$Q_i = T_i + \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot (T_i - P_i).$$

Координаты точки K_i — результат решения системы уравнений (1.5) относительно непрерывного параметра τ :

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + V_T \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{|T_{i+1} - T_i|} \cdot \tau. \end{cases} \quad (1.5)$$

Также, в качестве итерационного расчета точек траектории преследователя $\{P_i\}$ можно предложить решение системы уравнений (1.6), где шаг преследователя принадлежит окружности радиусом $V_P \cdot \Delta t$ с центром в точке P_{i-1} :

$$\begin{aligned} (P_i - P_{i-1})^2 &= (V_P \cdot \Delta t)^2 \\ P_i &= T_i + \tau \cdot \vec{l} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Где вектор \vec{l} — единичный вектор, определенный начальными положениями преследователя и цели:

$$\vec{l} = \frac{P_0 - T_0}{|P_0 - T_0|}$$

V_P — модуль скорости равномерного движения преследователя, τ — скалярный параметр, характеризующий положение точки на прямой.

1.2. Геометрическая модель метода параллельного сближения в пространстве

В трехмерном пространстве особенностью реализации метода параллельного сближения является то, что векторы направления скоростей преследователя и цели пересекаются в точке K на окружности Аполлония (Рисунок 1.6). Окружность Аполлония лежит в плоскости, образованной линией визирования, соединяющей преследователя P и цель T , и вектором скорости цели T .

Для расчета координат точек $\{P_i\}$ преследователя в пространстве можно применить как формулу (1.4), так и систему уравнений (1.6).

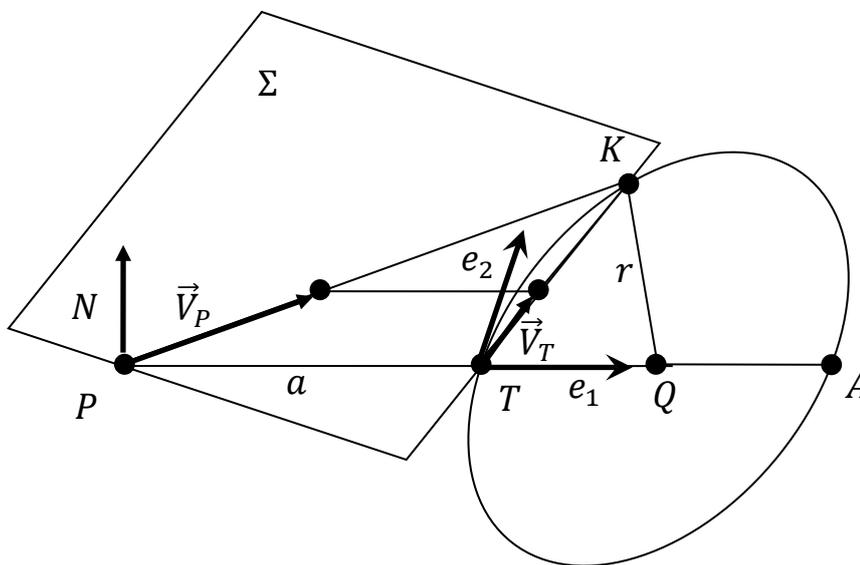


Рисунок 1.6 Окружность Аполлония в трехмерном пространстве

Как и в случае на плоскости вектор скорости преследователя \vec{V}_P направлен на точку K на окружности Аполлония, которая принадлежит плоскости Σ . Нормаль плоскости Σ с опорной точкой P равна:

$$N = \overline{PT} \times \vec{V}_P.$$

Все параметры окружности (радиус, центр, характеристическая точка A) рассчитываются как в случае на плоскости в локальной системе координат (e_1, e_2) с центром в точке T (Рисунок 1.6).

1.3. Геометрическая модель метода параллельного сближения на поверхности

Рассмотрим задачу преследования на поверхности, заданной в явном виде: $z = F(x, y)$. Рассмотрим рисунок 1.7. В дискретной модели метода параллельного сближения, представленной на рисунке, заданными в момент времени t_i являются координаты преследователя P_i , координаты цели T_i и следующее положение цели T_{i+1} . В этой модели рассчитывается множество точек преследователя $\{P_i\}$ в зависимости от координат преследователя $\{T_i\}$.

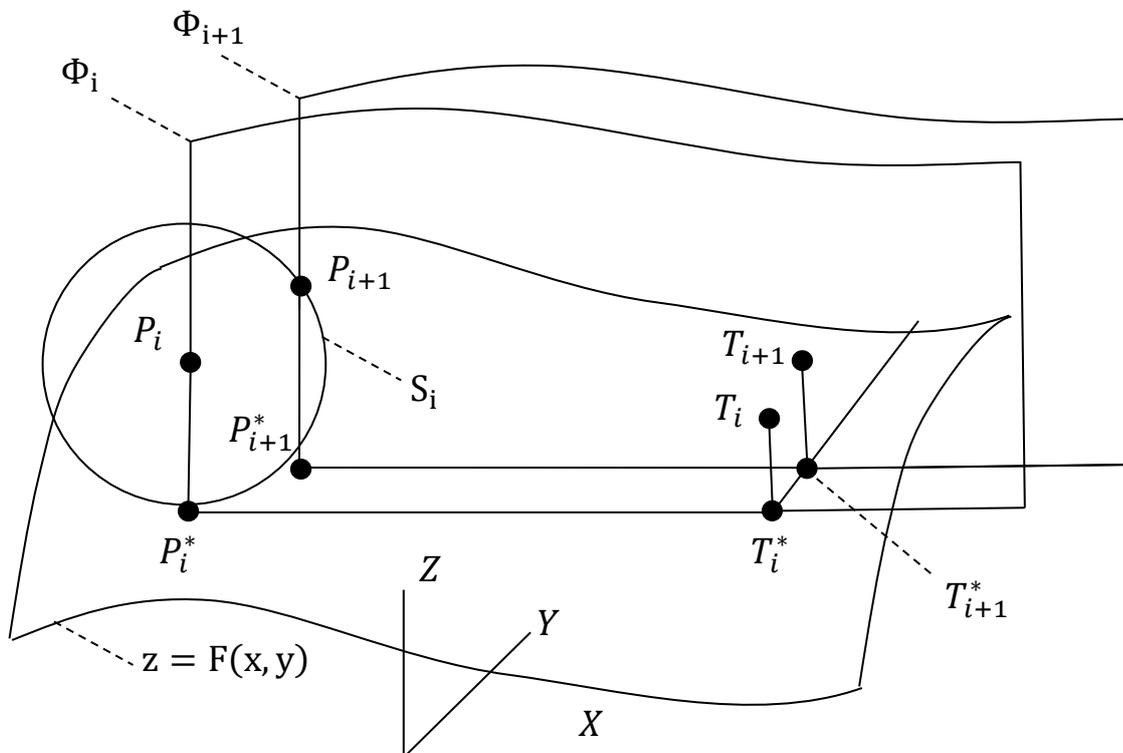


Рисунок 1.7 Модель параллельного сближения на поверхности

В модели, представленной на рисунке, целью является определить координаты точки преследователя P_{i+1} при заданных значениях точек P_i, T_i, T_{i+1} . Все точки P_i, T_i, T_{i+1} и P_{i+1} принадлежат поверхности $z = F(x, y)$.

Метод параллельного сближения на поверхности в данной геометрической модели является продолжением методики, представленной системой уравнений (1.6).

На горизонтальной плоскости проекций (XY) определяются проекции преследователя и цели, P_i^* и T_i^* . Строится плоскость параллелизма Φ_i , проходящей через прямые $(P_iP_i^*)$ и $(T_iT_i^*)$. Затем из точки T_{i+1} находится проекция T_{i+1}^* на плоскость (XY).

Через прямую $(T_{i+1}T_{i+1}^*)$ проводится плоскость Φ_{i+1} , параллельная плоскости Φ_i .

Координаты следующего шага P_{i+1} преследователя есть точка пересечения трех поверхностей: поверхности $z = F(x, y)$, по которой движутся преследователь и цель, плоскости параллелизма Φ_{i+1} , проходящей через прямую $(T_{i+1}T_{i+1}^*)$ и сферы S_i с центром в точке P_i , радиус которой равен $V_p \cdot \Delta t$, где V_p — модуль скорости равномерного движения преследователя по поверхности, Δt — временной промежуток итерационного процесса.

Как в случае на плоскости и в пространстве, итерационный процесс расчета точек траектории преследователя определяют начальные положения преследователя и цели, а также начальная скорость цели.

1.4. Геометрическая модель метода погони в пространстве и на плоскости

В методе погони на плоскости и в пространстве, при расчете траектории преследователя можно использовать следующую итерационную схему.

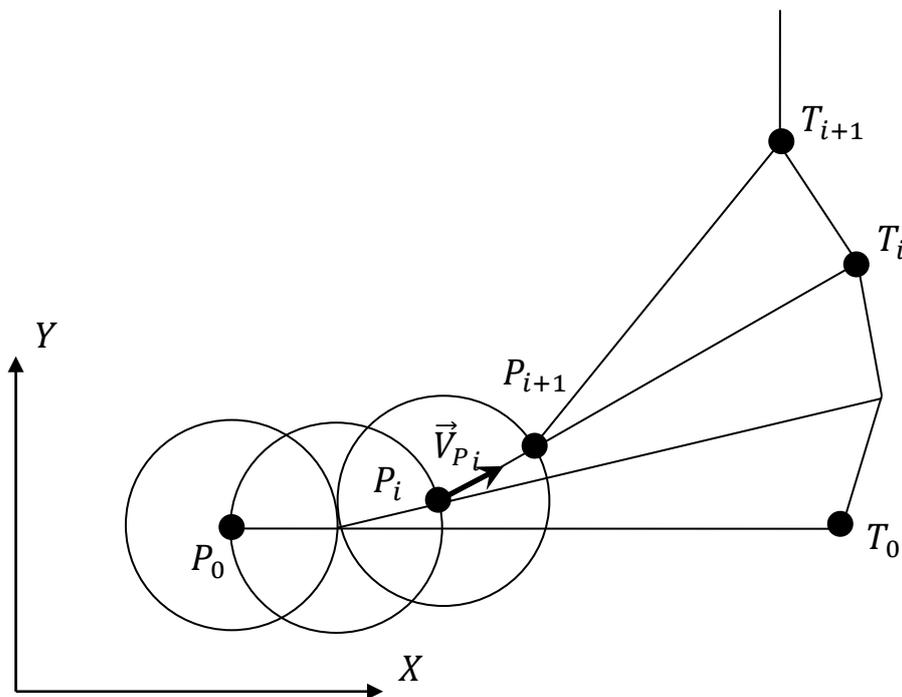


Рисунок 1.8 Модель погони

На рисунке 1.8 показано, в момент времени t_i вектор скорости \vec{V}_{P_i} преследователя P_i направлен на цель T_i .

Точка P_{i+1} удовлетворяет системе уравнений (1.7):

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= P_i + \tau \cdot (T_i - P_i) \\ (P_{i+1} - P_i)^2 &= (V_P \cdot \Delta t)^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Где V_P модуль скорости движения преследователя на плоскости или в пространстве, τ — независимый параметр, характеризующий положение точки на прямой, Δt — временной промежуток.

Решением системы (1.7) является выражение для значения P_{i+1} :

$$P_{i+1} = P_i + V_P \cdot \Delta t \cdot \frac{(T_i - P_i)}{\sqrt{(T_i - P_i)^2}}$$

Если рассматривается ситуация на плоскости, то второе уравнение системы (1.7) является окружностью с центром в точке P_i и радиусом $V_P \cdot \Delta t$.

Если рассматривается ситуация Модель, представленная на рисунке в пространстве, то второе уравнение системы (1.7) определяет сферу.

1.8, имеет постановку в виде системы дифференциальных уравнений (1.8):

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} \times (T - P) &= \mathbf{0} \\ \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dP}{dt} &= (V_P)^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Первое уравнение системы (1.8) выражает сонаправленность скорости $\frac{dP}{dt}$ преследователя вектору $(T - P)$, то есть скорость преследователя направлена на цель.

В случае на плоскости система уравнений (1.8) имеет решение:

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= V_P \cdot \frac{T_x - P_x}{|T - P|} \\ \frac{dP_y}{dt} &= V_P \cdot \frac{T_y - P_y}{|T - P|} \end{aligned}$$

В трехмерном пространстве система уравнение (1.8) имеет решение:

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= V_P \cdot \frac{T_x - P_x}{|T - P|} \\ \frac{dP_y}{dt} &= V_P \cdot \frac{T_y - P_y}{|T - P|} \\ \frac{dP_z}{dt} &= V_P \cdot \frac{T_z - P_z}{|T - P|} \end{aligned}$$

1.5. Геометрическая модель метода погони на поверхности

Рассмотрим метод погони на поверхности, заданной в явном виде: $z = f(x, y)$.

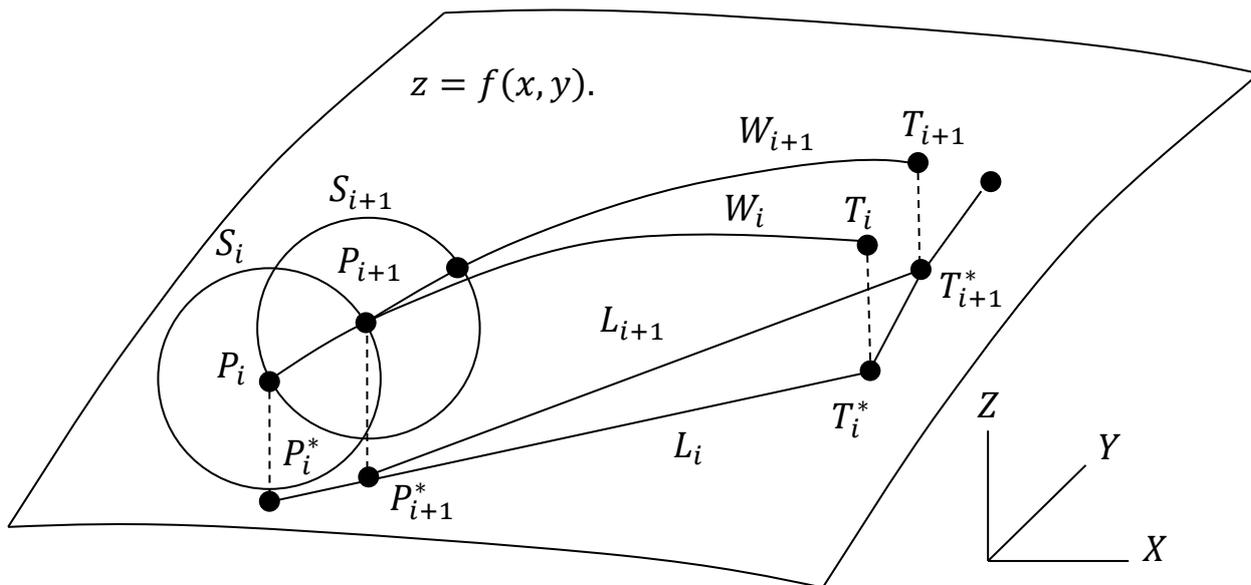


Рисунок 1.9 Модель погони на поверхности

Согласно итерационной схеме, представленной на рисунке 1.9, следующий шаг преследователя P_{i+1} рассчитывается следующим образом. На плоскости (XY) определяются горизонтальные проекции точек преследователя и цели. На рисунке 1.9 положения точек преследователя и цели P_i и T_i , а их проекции P_i^* и T_i^* .

Проекции P_i^* и T_i^* соединяются прямой линией L_i . Линия L_i является ортогональной проекцией линии W_i .

Точка P_{i+1} следующего шага преследователя точкой пересечения линии W_i и сферы S_i с центром в точке P_i и радиусом $V_p \cdot \Delta t$. Где V_p — модуль скорости равномерного движения преследователя по поверхности $z = f(x, y)$.

Рассмотрим подробно. Точки преследователя и цели заданы так:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \text{ и } T_i = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}.$$

Проекции преследователя и цели на плоскость (XY) выглядят так:

$$P_i^* = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } T_i^* = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Линия L_i , соединяющая ортогональные проекции, зависит от параметра τ положения точки на прямой:

$$L_i(\tau) = (1 - \tau) \cdot \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнение линии W_i , соединяющей точки P_i и T_i , на поверхности $z = f(x, y)$, также зависит от параметра τ положения точки на прямой $L_i(\tau)$:

$$W_i(\tau) = \begin{bmatrix} (1 - \tau) \cdot P_x + \tau \cdot T_x \\ (1 - \tau) \cdot P_y + \tau \cdot T_y \\ f\left((1 - \tau) \cdot P_x + \tau \cdot T_x, (1 - \tau) \cdot P_y + \tau \cdot T_y\right) \end{bmatrix}.$$

Так точка следующего шага преследователя P_{i+1} принадлежит линии $W_i(\tau)$ и сфере S_i можно составить уравнение относительно параметра τ .

$$(W_i(\tau) - P_i)^2 = (V_P \cdot \Delta t)^2.$$

Определив параметр τ , можно найти точку следующего шага преследователя P_{i+1} .

При соблюдении условий гладкости, непрерывности и дифференцируемости уравнения поверхности $z = f(x, y)$ и параметрической функции цели $T(t)$ движения по поверхности, то параметрическое уравнение движения преследователя $P(t)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} \cdot (T_y - P_y) &= \frac{dP_y}{dt} \cdot (T_x - P_x) \\ \left(\frac{dP_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dP_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dP_z}{dt}\right)^2 &= (V_P)^2 \cdot \\ P_z &= f(P_x, P_y) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Система уравнений (1.9) имеет явное выражение переменных $\frac{dP_x}{dt}$, $\frac{dP_y}{dt}$, $\frac{dP_z}{dt}$ (1.10):

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{V_P \cdot (T_x - P_x)}{\sqrt{(T_x - P_x)^2 + (T_y - P_y)^2 + \left((T_x - P_x) \cdot \frac{dP_x}{dt} + (T_y - P_y) \cdot \frac{dP_y}{dt} \right)^2}}$$

$$\frac{dP_y}{dt} = \frac{V_P \cdot (T_y - P_y)}{\sqrt{(T_x - P_x)^2 + (T_y - P_y)^2 + \left((T_x - P_x) \cdot \frac{dP_x}{dt} + (T_y - P_y) \cdot \frac{dP_y}{dt} \right)^2}} \quad (1.10)$$

$$\frac{dP_z}{dt} = \frac{\partial f}{\partial P_x} \cdot \frac{dP_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P_y} \cdot \frac{dP_y}{dt}$$

1.6. Геометрическая модель метода пропорционального сближения

Рассмотрим геометрическую модель метода пропорционального сближения. Метод пропорционального сближения используется в устройствах наведения зенитных управляемых ракет.

Разработана теория пропорциональной навигации [18]. В источнике [18] рассматриваются вопросы движения твердого тела, сближающегося с движущейся точкой по методу параллельного сближения, описаны базовые принципы пропорциональной навигации. В работе [19] произведен анализ методов пропорциональной навигации применительно к наведению зенитной управляемой ракеты на баллистическую цель.

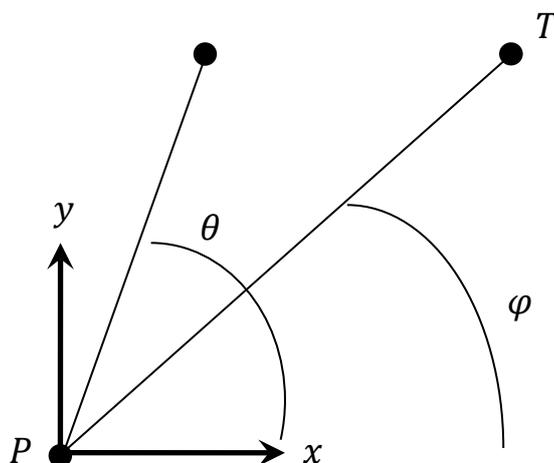


Рисунок 1.10 Метод пропорционального сближения

Суть метода пропорционального сближения заключается в том, что в системе координат, связанной с преследователем P (Рисунок 1.10), скорость изменения угла θ зависит от скорости изменения угла φ . Где θ угол наклона к оси X вектора скорости преследователя, а φ — угол наклона линии визирования преследователя с целью (PT), k — постоянный коэффициент:

$$\frac{d\theta}{dt} = k \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Опубликовано множество различных монографий, статей, приведем некоторые из них [20], [21], [22], [23], [24], где проведены исследования по разработке математического аппарата, динамике и кинематике зенитных управляемых ракет.

Дискретная модель для расчета траектории преследователя на плоскости представлена на рисунке 1.11.

Введем динамическую локальную систему координат с центром в точке текущего положения P_i преследователя, у которой ось ординат совпадает с направлением вектора скорости.

В локальной системе координат цель перемещается из точки T_i в точку T_{i+1} , при этом угол $\Delta\varphi$ между линиями визирования равен (Рисунок 1.11):

$$\Delta\varphi = \arccos\left(\frac{|T_i|^2 + |T_{i+1}|^2 - |T_i - T_{i+1}|^2}{2 \cdot |T_i| \cdot |T_{i+1}|}\right).$$

Тогда, согласно базовым представлениям о пропорциональном сближении, величину угла $\Delta\theta$ можно представить так:

$$\Delta\theta = k \cdot \arccos\left(\frac{|T_i|^2 + |T_{i+1}|^2 - |T_i - T_{i+1}|^2}{2 \cdot |T_i| \cdot |T_{i+1}|}\right).$$

Радиус-вектор точки P_i следующего шага преследователя в локальной системе координат будет таким (1.11):

$$P_{i+1} = \begin{bmatrix} V_P \cdot \Delta t \cdot \cos \left(k \cdot \arccos \left(\frac{|T_i|^2 + |T_{i+1}|^2 - |T_i - T_{i+1}|^2}{2 \cdot |T_i| \cdot |T_{i+1}|} \right) \right) \\ V_P \cdot \Delta t \cdot \sin \left(k \cdot \arccos \left(\frac{|T_i|^2 + |T_{i+1}|^2 - |T_i - T_{i+1}|^2}{2 \cdot |T_i| \cdot |T_{i+1}|} \right) \right) \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Где V_P — модуль скорости равномерного движения преследования, Δt — дискретный промежуток времени.

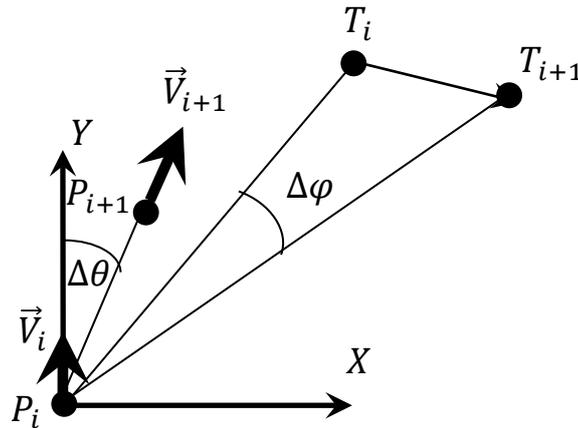


Рисунок 1.11 Дискретная модель пропорционального сближения

Как один из вариантов расчета траектории преследователя в пространстве можно рассматривать следующее.

Точки P_i , T_i и T_{i+1} определяют плоскость, относительно которой можно ориентировать локальную динамическую систему координат с центром в точке P_i . Ось ординат совпадает с направлением скорости, ось абсцисс принадлежит плоскости $(P_i T_i T_{i+1})$, а ось аппликат дополняет до правой ортонормированной тройки.

Отметим, если $k = 1$, то метод пропорционального сближения образует в метод погони, если $k = \infty$, то данный метод является методом параллельного сближения.

1.7. Геометрическая модель трех точечного метода сближения

Рассмотрим следующую дискретную модель сближения преследователя с целью, которая называется трехточечной [25], [26], [27], [28].

Метод трехточечного наведения применяется в системах наведения по лучу. В данном методе три точки: цель, преследователь и пункт наведения, всегда находятся на одной прямой (Рисунок 1.12).

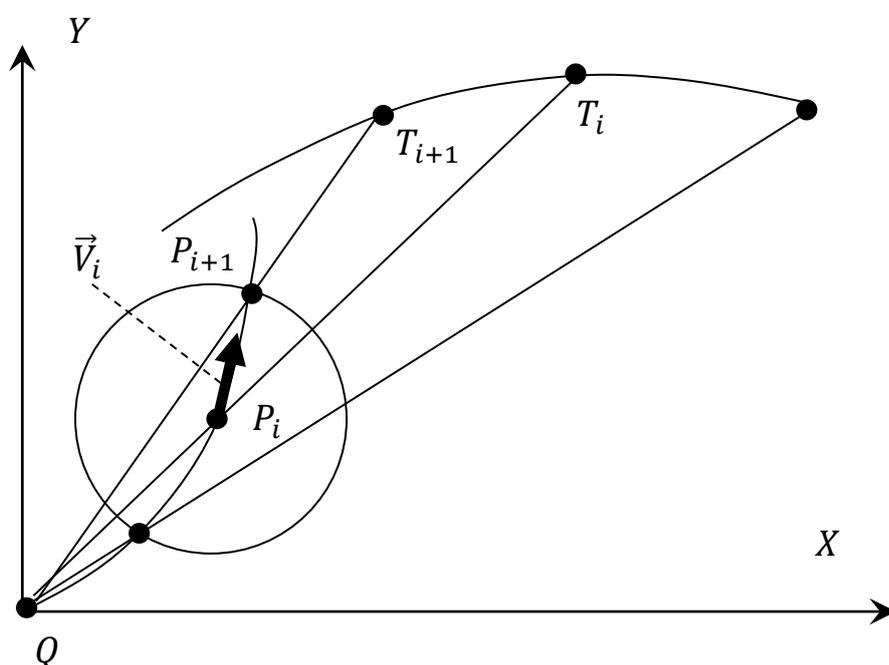


Рисунок 1.12 Модель трехточечного сближения

На рисунке 1.12 показано, что центр управления наведением Q , цель T_i и преследователь P_i в момент времени t_i находятся на одной прямой. Следующий шаг преследователя P_{i+1} есть результат пересечения прямой (QT_{i+1}) с окружностью на плоскости или со сферой в пространстве с центром в точке P_i и радиусом $|\vec{V}_i| \cdot \Delta t$. Где \vec{V}_i — вектор скорости в момент времени t_i , Δt — промежуток времени.

Модель трехточечного сближения применяется, когда цель является маломаневренной или она, атакуя, пикирует на средства противовоздушной обороны.

Координаты следующего шага преследователя удовлетворяют системе уравнений (1.12):

$$\begin{aligned} (P_{i+1} - P_i)^2 &= (\vec{V}_i \cdot \Delta t)^2 \\ P_{i+1} &= (1 - \tau) \cdot Q + \tau \cdot T_{i+1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.8. Геометрическая модель уклонения цели

Вопросы уклонения цели от преследователя рассматривались во многих работах, приведем некоторые из них [29], [30], [31], [32], [33].

Рассмотрим на плоскости преследователя P и цель T (Рисунок 1.13).

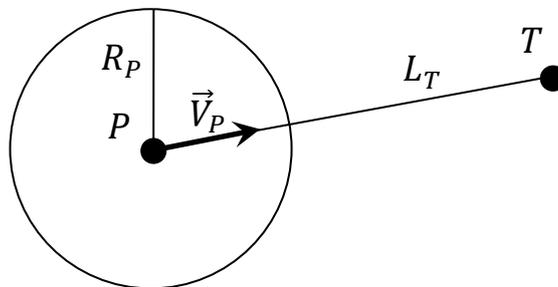


Рисунок 1.13 Модель уклонения цели

Будем считать, что преследователь P , двигаясь с вектором скорости \vec{V}_P , имеет область обнаружения в виде окружности радиуса R . А цель T находится от преследователя P на расстоянии L_P в момент начала преследования так, что линия (PT) и вектор \vec{V}_P являются коллинеарными.

Требуется найти траекторию движения цели T , при которой время движения цели является минимальным, чтобы избежать области обнаружения.

Для решения этой задачи перейдем в локальную динамическую систему координат с центром в точке нахождения преследователя P . Ось абсцисс E_1 , в которой располагается вдоль вектора \vec{V}_P , а ось ординат E_2 располагается перпендикулярно \vec{V}_P (Рисунок 1.14).

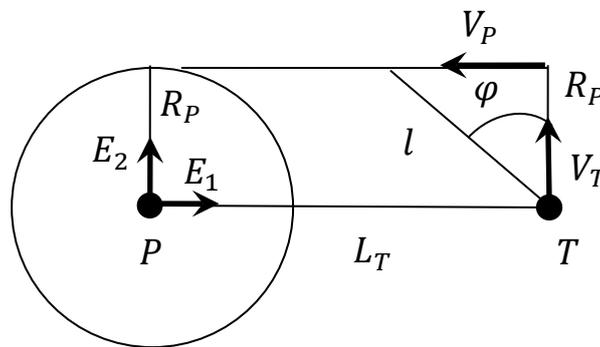


Рисунок 1.14 Локальный динамический базис преследователя

В такой постановке задача похожа на задачу, где надо переплыть реку шириной R_P со скоростью течения V_P (Рисунок 1.14). Если скорость цели будет V_T , а ее направление будет перпендикулярно берегам, то минимальное время переправы через реку будет:

$$T_{min} = \frac{R_P}{V_T}.$$

Итоговая скорость будет направлена под углом φ к направлению скорости цели T (Рисунок 1.14):

$$tg(\varphi) = \frac{V_P}{V_T}.$$

Цель T преодолет расстояние равное l :

$$l = R_P \cdot \frac{\sqrt{V_T^2 + V_P^2}}{V_T}. \quad (1.13)$$

На рисунке 1.15 показан случай, когда цель T находится на минимальном расстоянии L_{Tmin} от преследователя P , при котором траектория цели не будет проходить через область обнаружения, при условии перпендикулярности векторов скоростей.

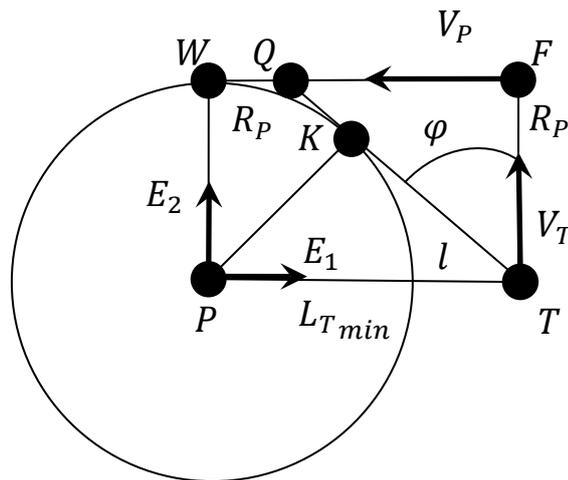


Рисунок 1.15 Минимальное расстояние до преследователя

Прямая (TQ) траектории цели касается окружности обнаружения в точке K , при этом имеется два конгруэнтных треугольника, (TQF) и (PKT) , то есть $|TQ| = |PT|$. Откуда мы заключаем, что если $|TQ|$ вычисляется по формуле (1.13), то для величины L_{Tmin} имеется следующее выражение:

$$L_{Tmin} = R_P \cdot \frac{\sqrt{V_T^2 + V_P^2}}{V_T}.$$

Напомним, скорость цели V_T должна быть направлена перпендикулярно линии (PT) , тогда линия (TQ) разделяет области, где траектория будет замеченной преследователем или нет.

На рисунке 1.16 показано как преследователь P с областью обнаружения в виде окружности радиуса R_P движется к цели T .

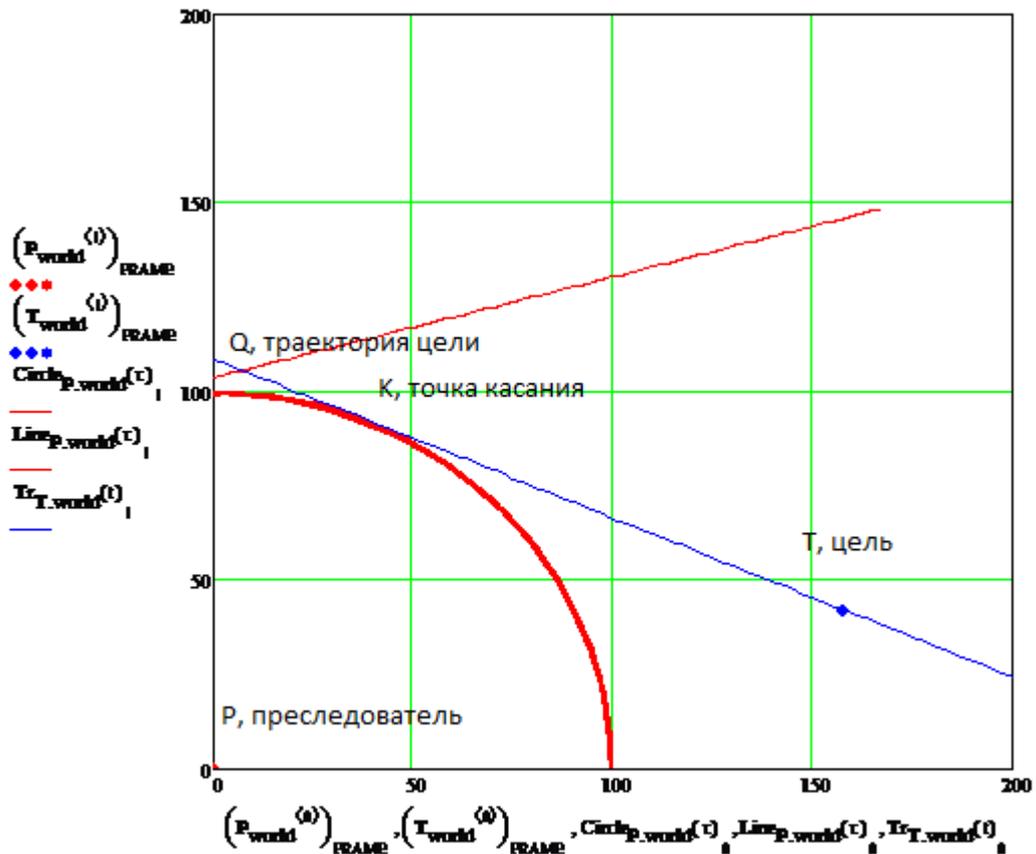


Рисунок 1.16 Результаты моделирования преследования с областью обнаружения в виде окружности

Цель T расположена на плоскости произвольно, в момент начала преследования она неподвижна. Расстояние между точками P и T выражается формулой (1.13).

Рисунок 1.16 дополнен ссылкой на анимированное изображение [34], где показано критическое уклонение с касанием зоны обнаружения.

На рисунке 1.17 показан случай, когда траектория цели проходит через область обнаружения преследователя.

Рисунок 1.17 дополнен ссылкой на анимированное изображение [35], показано прохождение цели через зону обнаружения преследователя.

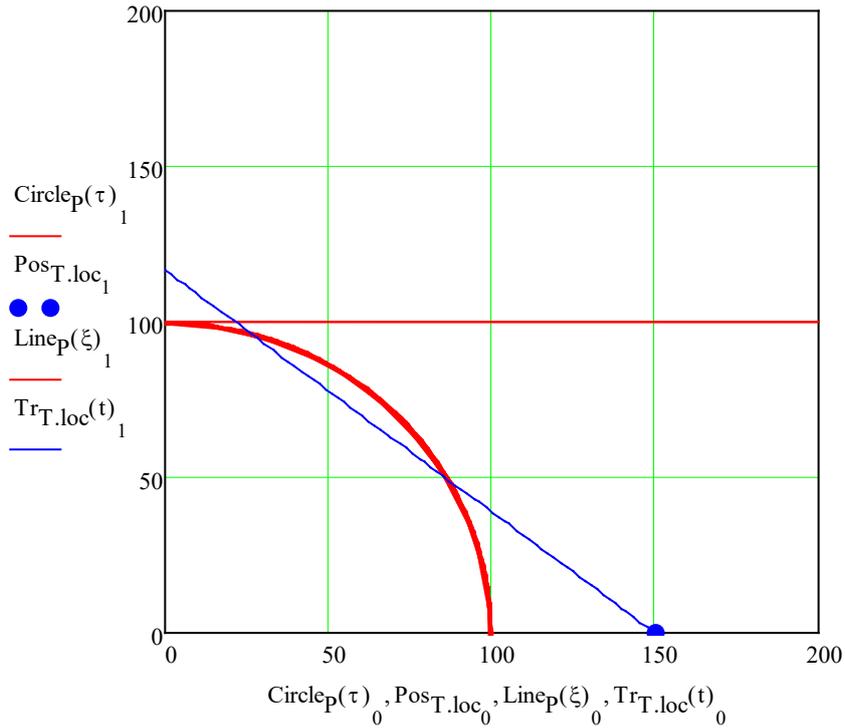


Рисунок 1.17 Цель проходит через область обнаружения преследователя

Рассмотрим задачу, где область обнаружения ограничена не только окружностью, но и углом величиной 2α (Рисунок 1.18).

В этом случае цель T должна пересечь участок плоскости шириной $R_T = R_P \cdot \sin(\alpha)$. Тогда цель T пройдет расстояние l равное:

$$l = R_T \cdot \frac{\sqrt{V_T^2 + V_P^2}}{V_T} = R_P \cdot \frac{\sqrt{V_T^2 + V_P^2}}{V_T} \cdot \sin(\alpha).$$

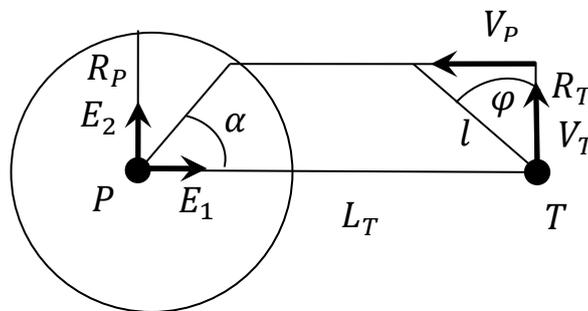


Рисунок 1.18 Локальный динамический базис преследователя с секторной областью обнаружения

На рисунке 1.19 показано, что угол α сектора обнаружения преследователя P больше угла φ движения цели T .

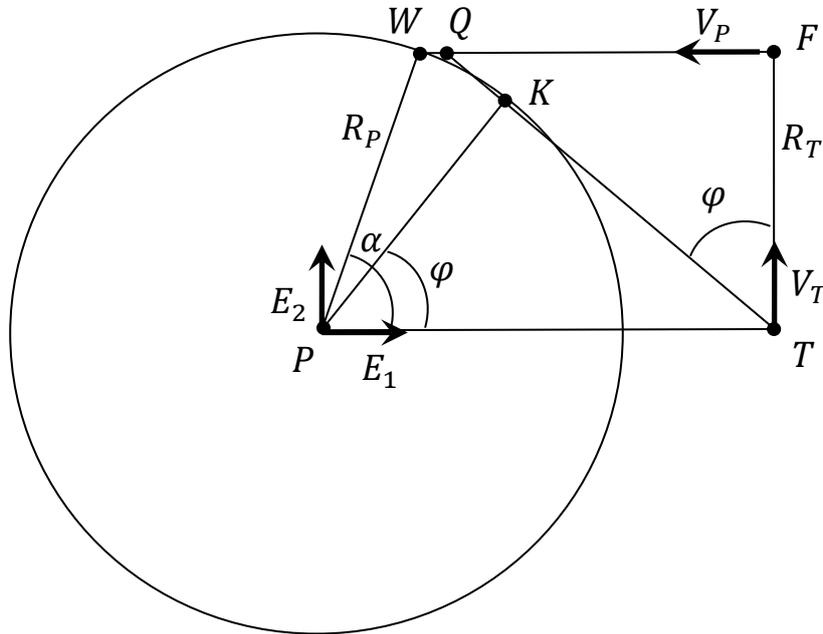


Рисунок 1.19 Угол сектора обнаружения преследователя больше угла движения цели

На этом рисунке отображена ситуация когда траектория $[TQ]$ цели T касается сектора обнаружения преследователя P . Минимальное время прохождения составляет:

$$T_{min} = \frac{R_T}{V_P}.$$

Цель T пройдет путь $[TQ]$ длиной l , равной:

$$l = R_T \cdot \frac{\sqrt{V_T^2 + V_P^2}}{V_T}.$$

Минимальное расстояние $[PT]$ между преследователем и целью, при котором траектория $[TQ]$ будет касаться сектора обнаружения преследователя, при условии перпендикулярности скоростей.

Точка касания K рассчитывается по формуле:

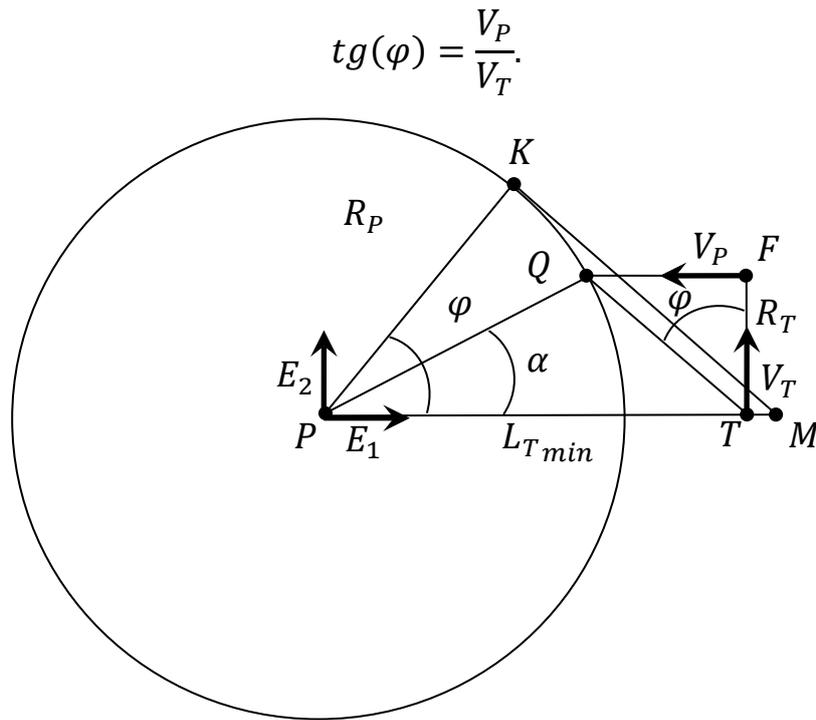


Рисунок 1.21 Секторная область с меньшим углом раствора

Необходимо построить касательную прямую, чтобы она с осью ординат E_2 составляла угол φ . На рисунке 1.21 это прямая (KM). Точка Q , ограничивающая сектор обнаружения, имеет координаты:

$$Q = R_P \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Ширина полосы, которую надо преодолеть, имеет величину R_T :

$$R_T = R_P \cdot \sin(\alpha).$$

Расстояние $[QF]$ является равным:

$$|QF| = R_T \cdot \operatorname{tg}(\varphi) = R_P \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{V_P}{V_T}.$$

Минимальное расстояние $L_{Tmin} = |PT|$, при котором цель T не попадает в зону обнаружения преследователя, при условии перпендикулярности скоростей, будет равным:

$$L_{Tmin} = R_P \cdot \cos(\alpha) + R_P \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{V_P}{V_T}.$$

Отрезок $[QT]$, принадлежащий траектории цели, получается параллельным смещением касательного отрезка $[KM]$ до совмещения с точкой Q .

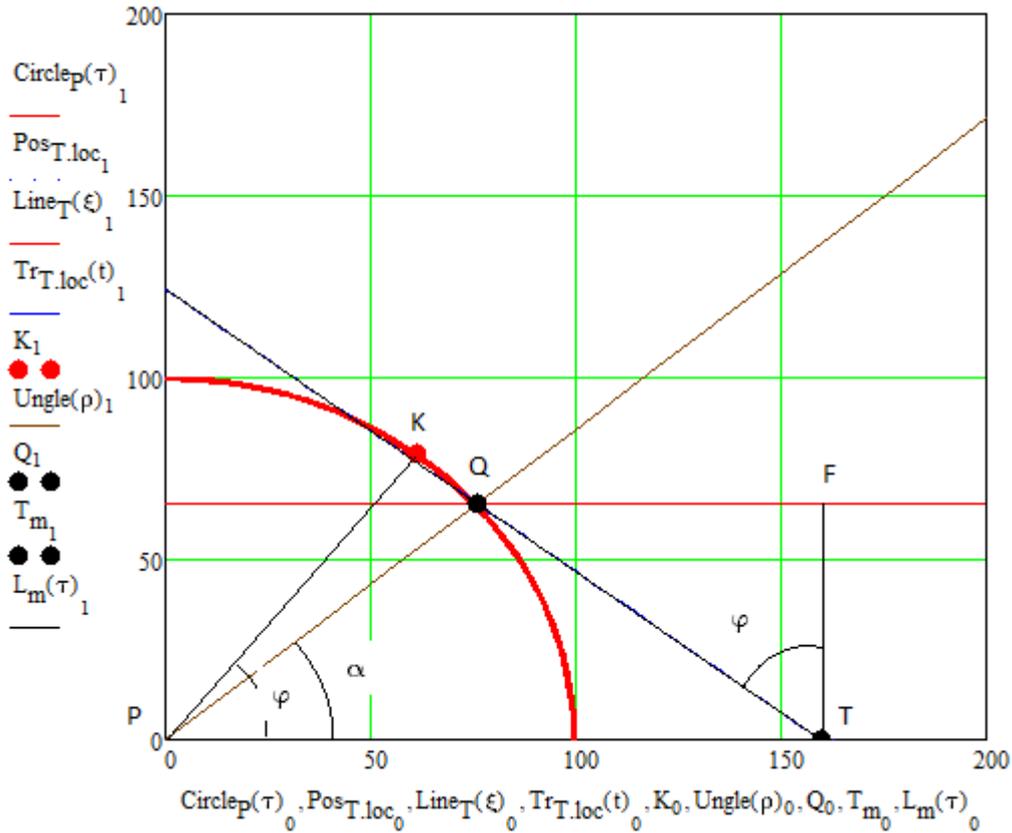


Рисунок 1.22 Модель секторной области обнаружения в системе компьютерной математики

На рисунке 1.22 представлена компьютерная модель в системе компьютерной математики. На рисунке показано угол сектора обнаружения α больше, чем угол φ . Напомним, величина угла φ определяется соотношением скоростей преследователя и цели:

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{V_P}{V_T}.$$

Рисунок 1.22 дополнен анимированным изображением [37], где можно будет посмотреть, как цель T избегает обнаружения преследователем P с областью обнаружения в виде углового сектора 2α , ограниченного окружностью

радиуса R_p . На видео показано, что цель покидает полосу вероятного обнаружения в последний момент времени, проходя через точку Q .

Рассмотрим модель преследования, где область обнаружения преследователя P представляет собой область в виде угла величиной 2α (Рисунок 1.23).

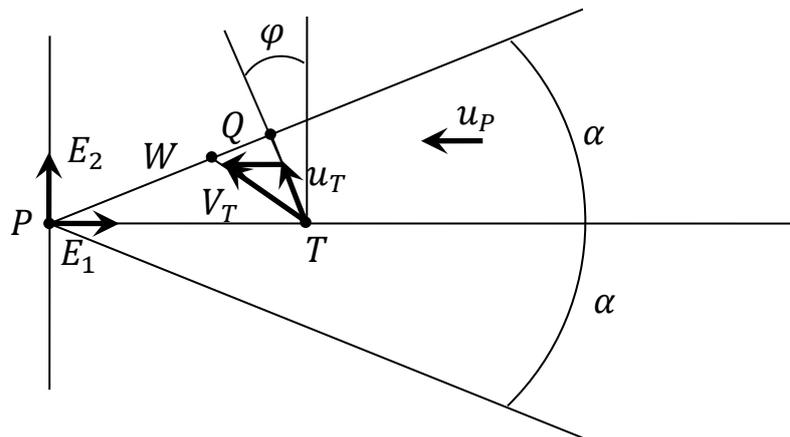


Рисунок 1.23 Угловая область обнаружения у преследователя

Сформируем локальную динамическую систему координат $(E_1 P E_2)$, центр которой расположен в точке нахождения преследователя P , ось ординат E_1 направлена вдоль вектора скорости, а ось E_2 направлена перпендикулярно скорости движения преследователя (Рисунок 1.23).

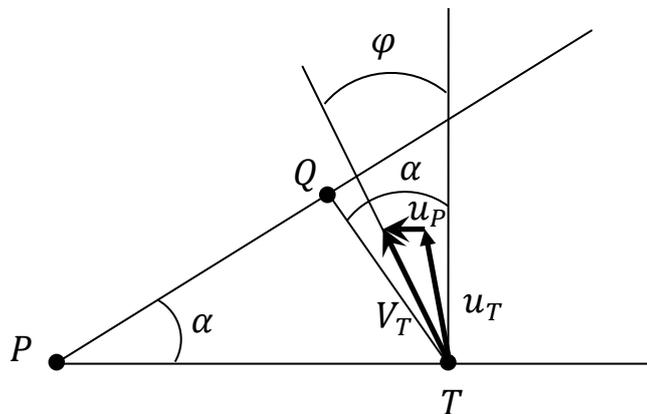


Рисунок 1.24 Разложение вектора скорости цели

В системе координат $(E_1 P E_2)$ итоговая скорость V_T цели T складывается из скорости движения среды u_P и скорости движения цели u_T в мировой системе координат: $\vec{V}_T = \vec{u}_P + \vec{u}_T$.

На рисунке 1.24 показано, что скорость u_T цели направлена под углом φ к линии перпендикуляра к линии (PT) . Если u_T это модуль скорости цели, то ее проекция на линию (QT) будет равна $u_T \cdot \cos(\alpha - \varphi)$, где (QT) является перпендикуляром к линии, ограничивающей область обнаружения преследователя (Рисунок 1.24).

Проекция скорости u_T на линию (QT) равна $u_P \cdot \sin(\alpha)$. Тогда проекция на линию (QT) результирующей скорости V_T будет $u_T \cdot \cos(\alpha - \varphi) + u_P \cdot \sin(\alpha)$.

Тогда время, за которое цель T , достигнет линии угла, будет:

$$\frac{|QT|}{u_T \cdot \cos(\alpha - \varphi) + u_P \cdot \sin(\alpha)}$$

Время выхода из области обнаружения достигнет своего минимума, при соблюдении $\varphi = \alpha$, когда скорость u_T цели направлена вдоль линии (QT) .

На рисунке 1.23 изображен именно такой случай. Цель выйдет из области обнаружения в точке W . Результирующая скорость \vec{V}_T направлена вдоль прямой (WT) .

На рисунке 1.25 показан первый кадр из результата работы программы в системе компьютерной математики.

Преследователь P преследует цель T в мировой системе координат. Вектор скорости преследователя направлен на цель.

Задача состоит в построение оптимальной траектории цели, чтобы покинуть область обнаружения как можно быстрее.

Рисунок 1.25 дополнен ссылкой на анимированное изображение [38], где можно будет посмотреть на итерационный процесс расчета траектории цели.

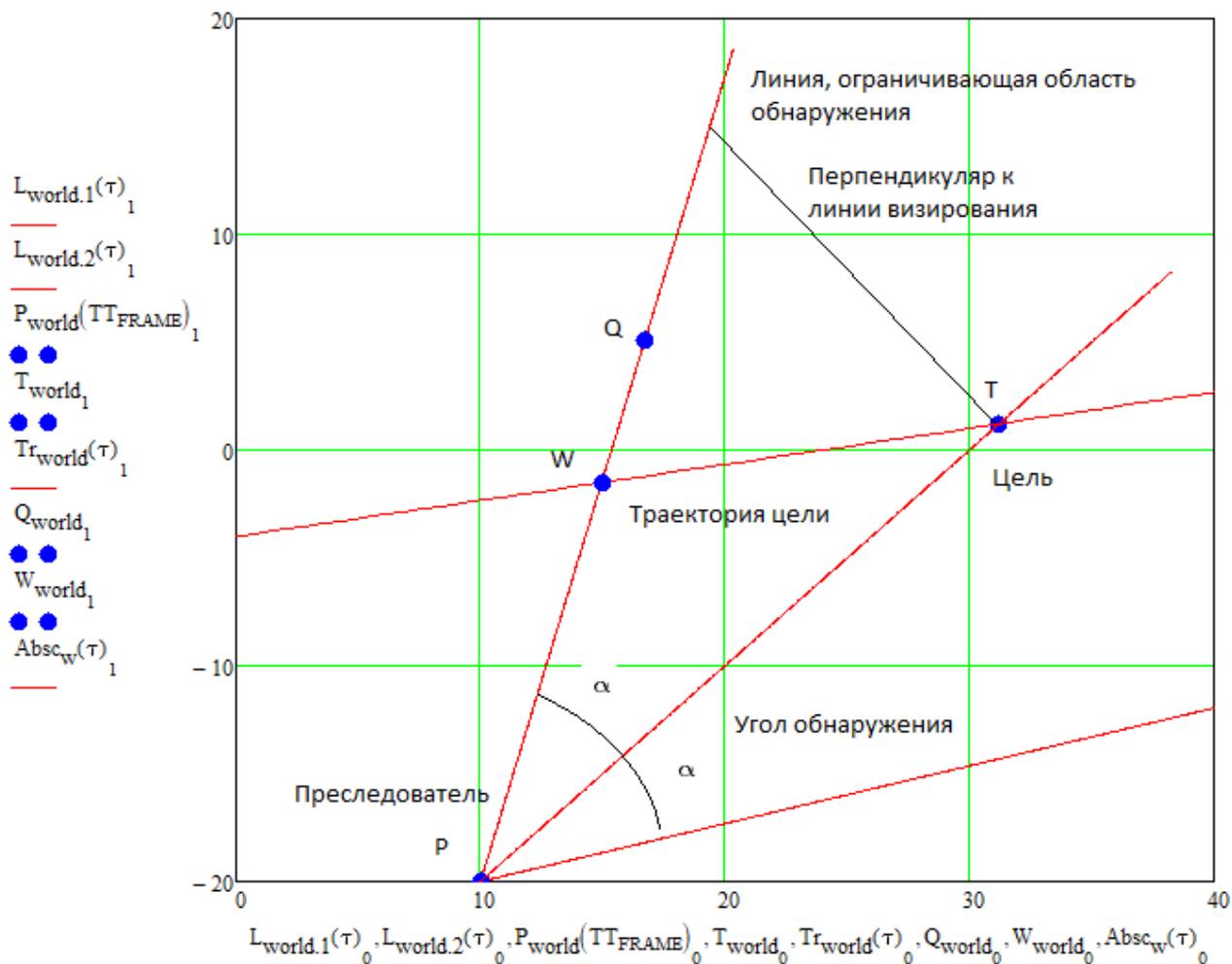


Рисунок 1.25 Модель угловой области обнаружения у преследователя

1.9. Геометрические модели группового преследования

Задачи группового преследования обладают не меньшим многообразием. В диссертационном исследовании рассматриваются модели согласованного группового преследования одиночной цели, модели преследования одиночной цели группой с разными стратегиями, модели группового преследования множеств целей.

1.9.1. Геометрическая модель преследования одиночной цели согласованной группой

Под согласованным поведением группы преследователей в разных задачах предлагаются разные критерии согласованности. Допустим, в работе Ха-

чумова М.В. [39] рассматривается управление группой беспилотных летательных аппаратов в движении строем по эталонной траектории.

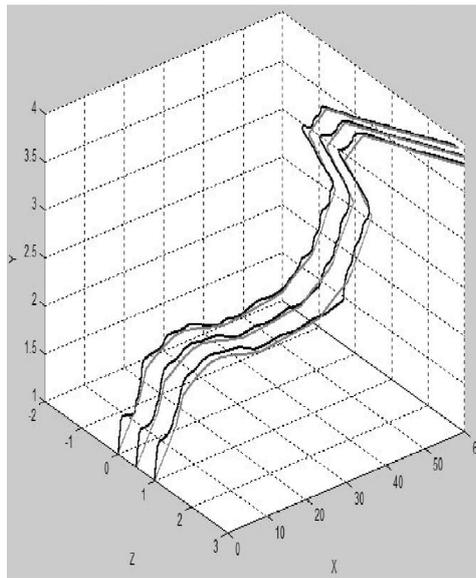


Рисунок 1.26 Следование группы БПЛА по определенному маршруту

Для каждого БПЛА создается цель — «псевдообъект», которую он преследует. Преследует, согласно двум стратегиям:

Стратегия 1 движения по точкам. Траектория БПЛА корректируется на отклонение от эталонной траектории.

Стратегия 2 параллельного сближения с эталонной целью (псевдообъектом).

Следуя, при этом трем правилам:

Правило 1 устранения опасного сближения, если расстояние между объектами стало критично мало, то применить к ним стратегию 2.

Правило 2 следования траектории, если отклонение от эталонной траектории не превышает пороговых значений, то применить стратегию 1.

Правило 3 упреждения, если отклонение от эталонной цели превышает пороговые значения, то применить стратегию 2

На рисунке 1.26 показаны результаты моделирования со случайными колебаниями значений ветра.

Модель, представленная в работе [39], можно интерпретировать, как следование за ведущим БПЛА или следование за определенной точкой пространства, которая выполняет роль ведущего БПЛА.

Также такое движение можно трактовать, как движение группы объектов с жесткими, ориентированными в пространстве, связями. В работе [39] учитывались стохастические изменения в траектории ведущего БПЛА.

В работе [40] (Автор М.В. Хачумов) согласованностью в поведении группы преследователей можно считать окружение цели (Рисунок 1.27).

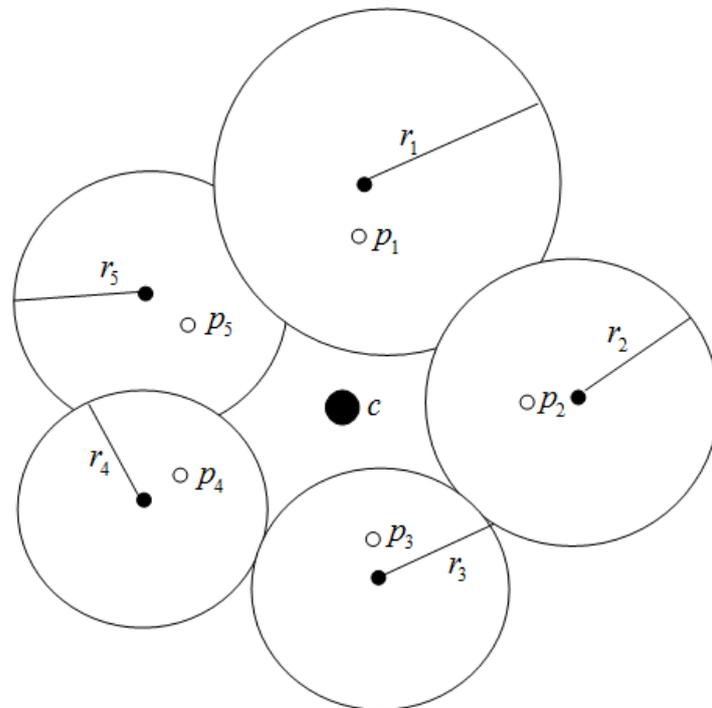


Рисунок 1.27 Поимка цели

На рисунке 1.27, взятом из статьи Хачумова М.В. [40], положение цели обозначено символом c , положения преследователей $P_i, i = 1..5$.

В определенный момент времени для каждого из преследователей с фиксированным направлением скорости соответствует окружность Аполлония.

В статье [40] считается, что цель захвачена, если ее можно окружить, как на рисунке 1.27, множеством из окружностей Аполлония.

На рисунке 1.28 из той же статьи показаны выбор стратегии и управляющих векторов для цели, чтобы выскользнуть из кольца окружностей Аполлония преследователей.

Хотя преследование происходит на плоскости, методику преследования возможно перенести в трехмерное пространство.

Задача, представленная на рисунках 1.27 и 1.28, решалась для случаев, когда скорость цели превышала по модули скорости преследователей. И, видимо, маневренность цели тоже выше маневренности преследователей.

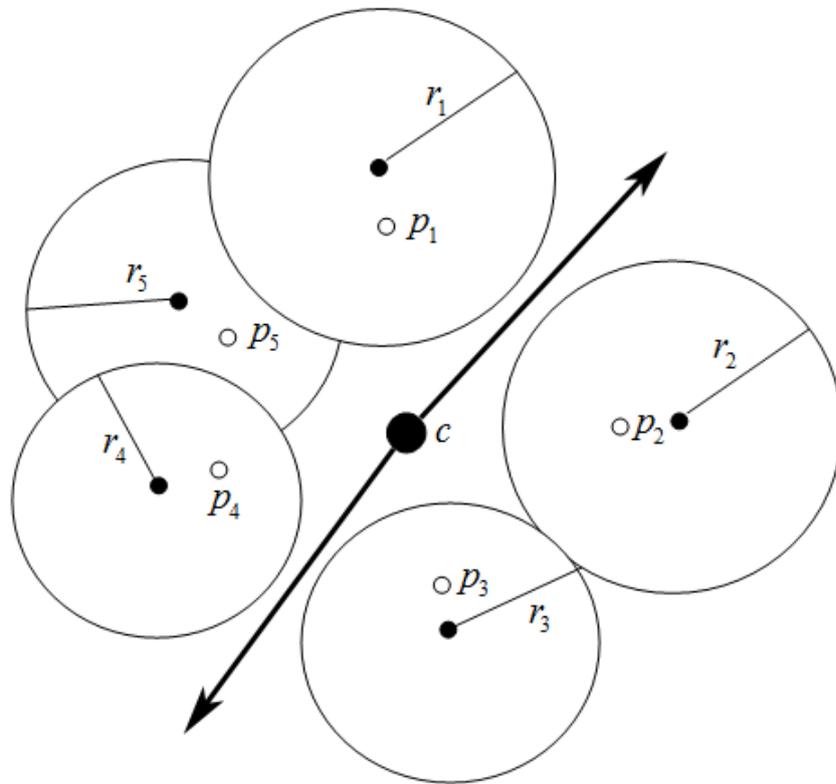


Рисунок 1.28 Уход цели от преследователей

Следует отметить, чтобы уйти от преследования, как показано на рисунке 1.28, цель должна обладать информацией о том, что все преследователи придерживаются метода параллельного сближения.

1.9.2. Геометрическая модель группового преследования множеств целей

Задаче группового преследования посвящено большое количество работ. Задача группового преследования одиночной цели является хорошо изученной и во многих работах рассматривалось ее решение [41] , [42], [43], [44], [45] и др. Задачи группового преследования цели и целей тесно связаны с задачами уклонения.

В работах [46], [47], [48], [49], [50] рассматриваются дифференциальные игры преследования, суть которых состоит в преследовании n целей m преследователями.

В задачах преследования n целей m преследователями встает вопрос, как и в любой задаче преследования, что считается выполнением задачи. Если m больше, чем n , то естественным будет считаться поимка n целей. Иногда решается задача о многократной поимке некоторых целей.

В моделях диссертационного исследования поимкой считается совпадение координат преследователя и цели с некоторой степенью точности.

В некоторых задачах критерием выполнения группового преследования является время, за которое необходимо достичь всех целей.

Важной задачей для группового преследования множества целей является автоматизированное распределение целей.

В диссертационном исследовании критерием для автоматизированного распределения целей является расстояние до целей.

В заключение скажем, что задача группового преследования нескольких целей отличается своим многообразием, как в постановке задач, так и способами ее решений.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 1

1. Произведен обзор и анализ задач преследования. Анализ производился на предмет существования геометрических дискретных моделей. Математический аппарат приведенных геометрических моделей позволяет совершать итерационный расчет траекторий участников в режиме реального времени.
2. Задачи преследования предполагают огромное многообразие по количеству задач и целей для участников задачи преследования. В диссертационном исследовании рассматривается в качестве задачи для преследователя достижение точек нахождения преследуемого объекта. В геометрических моделях диссертационного исследования в задачах достижения целей еще добавляются дифференциальные ограничения для траекторий преследователя.
3. В задачах преследования в случае построения траектории преследуемого объекта требуется моделирование поведения цели. В связи с этим, актуальной является задача уклонения цели. Эта задача также отличается многообразием. Ответом на вопрос, что в модели считать уклонением, приведены примеры, когда преследуемый объект покидает область обнаружения по оптимальной траектории. Критерием оптимальности траектории служит минимальное время.
4. Антагонистические дифференциальные игры в виде задач преследования с адаптивным поведением подразумевают, что участники совершают маневрирование, в соответствии с заложенными алгоритмами. В диссертационном исследовании приведены геометрические модели с адаптивным поведением преследователя и цели.
5. Для выполнения задач во время процесса преследования участники должны обладать некоторой информацией о своем оппоненте. Допустим, во время параллельного преследования, чтобы преследователь

смог направить свою скорость в нужном направлении, необходима информация о точном месте расположения цели и ее направлении скорости в данный момент времени. Во время метода пропорционального метода сближения преследователь должен знать угловые параметры нахождения цели, а также угловую скорость изменения цели. При использовании трехточечного метода сближения преследователь должен иметь информацию о месте нахождения цели и ее векторе скорости. Для цели для совершения маневрирования, уклонения для выхода из зоны обнаружения необходима информация о месте нахождения преследователя, а также данные об области обнаружения, допустим, радиус окружности или сферы. Если преследователь будет совершать маневрирование, то в диссертационном исследовании представлены модели, где для цели необходима информации о максимально допустимой угловой скорости вращения.

При обзоре трудов по уклонению и выбору оптимальных траекторий были использованы следующие источники [51], [52], [53], [54], [55], [56].

По общим вопросам теории дифференциальных игр было использованы следующие источники [57], [58], [59], [60].

ГЛАВА 2. ФОРМАЛИЗОВАННОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

2.1. Основная модель описания динамических объектов при преследовании в пространстве

В диссертационном исследовании в случае двух участников задачи преследования в пространстве рассматривается антагонистическая, позиционная, дискретная игра с простым движением.

Если бы была рассмотрена непрерывная дифференциальная игра, то она бы соответствовала бы игре преследования в постановке Р. Айзекса [4]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= f_P(t, x_P(t), u_P(t)) & \dot{x}_T &= f_T(t, x_T(t), u_T(t)) \\ \|u_P(t)\| &= 1 & \|u_T(t)\| &= 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Где $x_P(t)$, $x_T(t)$ — фазовые векторы преследователя и цели, t — время, $u_P(t)$, $u_T(t)$ — единичные векторы управлений преследователя и цели.

В случае, когда совершает действия в зависимости от состояния цели, а цель действует в зависимости от состояния преследователя, то система уравнений (2.1) дополняется уравнением:

$$\begin{aligned} \dot{x}_P &= f_P(t, x_P(t), u_P(t)) & \dot{x}_T &= f_T(t, x_T(t), u_T(t)) \\ \|u_P(t)\| &= 1 & \|u_T(t)\| &= 1 \\ \Phi(u_P(t), u_T(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

При решении системы (2.2) задача преследования превращается в антагонистическую игру.

Преобразование непрерывной модели в квазидискретную модель, приводит к такой модели:

$$\begin{aligned}
 x_{P_{i+1}} &= x_{P_i} + V_P \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_{P_i} & x_{T_{i+1}} &= x_{T_i} + V_T \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_{T_i} \\
 \|\vec{u}_{P_i}\| &= 1 & \|\vec{u}_{T_i}\| &= 1 \\
 \Phi_i(\vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_i}) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Где x_{P_i}, x_{T_i} — декартовы координаты преследователя и цели, соответственно, в i — ый момент времени. В диссертационном исследовании рассматривается простое движение участников игры, то V_P, V_T — модули скоростей равномерного движения преследователя и цели, Δt — временной промежуток дискретизации по времени, $\vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_i}$ — управляющие векторы, Δt — промежуток дискретизации по времени.

Вместо последнего уравнения системы (2.3) могут быть векторные уравнения:

$$\vec{u}_{P_{i+1}} = F_{P_i}(\vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_i}), \vec{u}_{T_{i+1}} = F_{T_i}(\vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_i}).$$

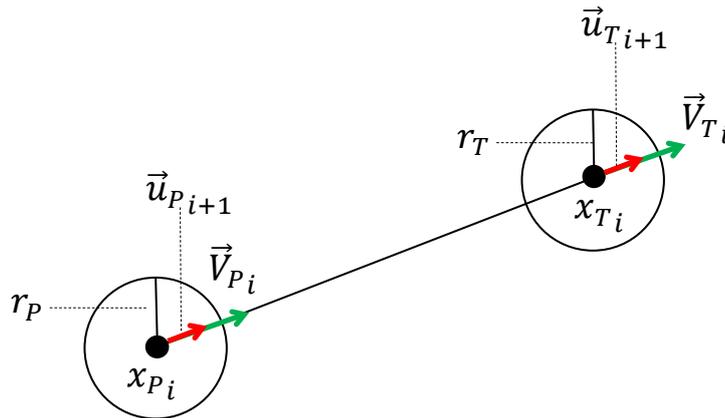


Рисунок 2.1 Конечная фаза преследования по методу погони

Как пример, на рисунке 2.1 представлена конечная фаза дискретной модели преследования по методу погони в пространстве. Управляющий вектор

преследователя $\vec{u}_{P_{i+1}}$ можно трактовать как результат пересечения линии визирования $(x_{P_i}x_{T_i})$ со сферой радиуса $r_P = V_P \cdot \Delta t$ с центром в точке x_{P_i} .

В случае антагонистической игры управляющий вектор цели \vec{u}_{T_i} , как один из вариантов, можно трактовать как единичный вектор, сонаправленный вектору скорости преследователя в i -ый момент времени:

$$\vec{u}_{T_{i+1}} = \frac{\vec{V}_{P_i}}{|\vec{V}_{P_i}|}$$

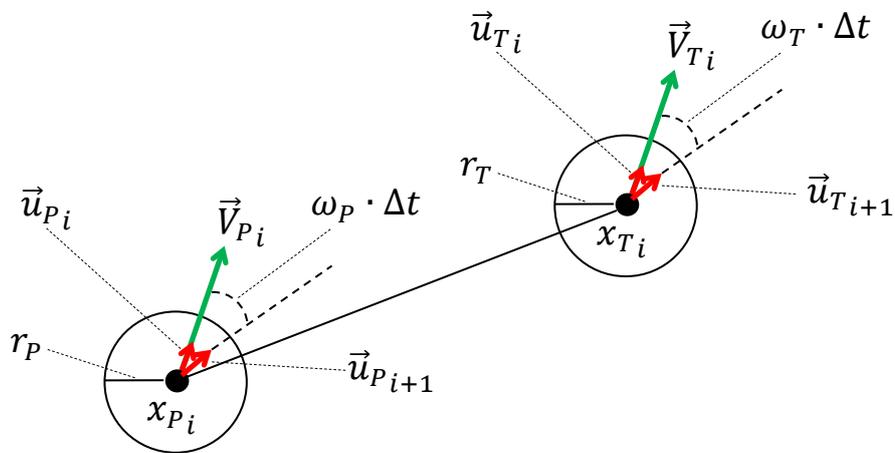


Рисунок 2.2 Метод погони с ограничениями по угловому вращению

В случае, когда преследователь и цель имеют ограничения по угловой скорости вращения (Рисунок 2.2), векторы управления $\vec{u}_{P_{i+1}}$, $\vec{u}_{T_{i+1}}$ можно представить как:

$$\vec{u}_{P_{i+1}} = M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_{i+1}} = M_{T_i}(\omega_T \cdot \Delta t) \cdot \vec{u}_{T_i}$$

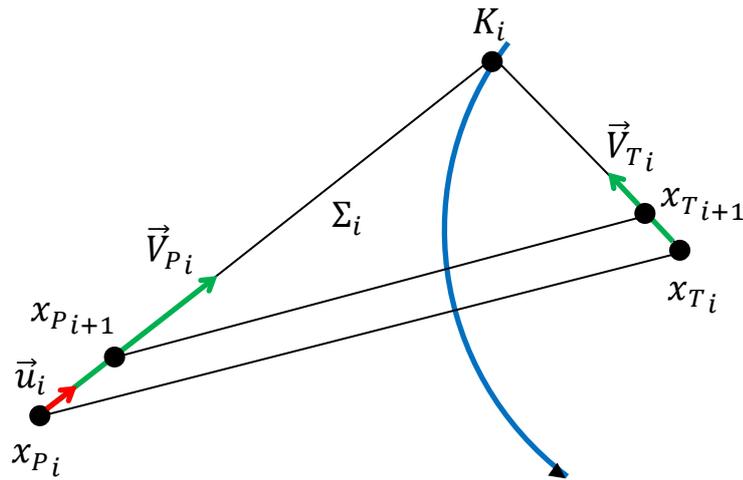


Рисунок 2.3 Метод параллельного сближения

Где $M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t)$, $M_{T_i}(\omega_T \cdot \Delta t)$ — матрицы пространственных поворотов преследователя и цели.

Рассмотрим метод параллельного сближения в пространстве, когда скорости преследователя и цели направлены в точку K_i на окружности Аполлония, как показано на рисунке 2.3.

Линия визирования $(x_{P_i}x_{T_i})$ и вектор скорости цели \vec{V}_{T_i} задают плоскость Σ_i , где будет находиться окружность Аполлония. Декартовы координаты преследователя и цели x_{P_i} , x_{T_i} , вектор скорости цели \vec{V}_{T_i} и модуль скорости преследователя $|\vec{V}_{P_i}|$ задают на плоскости Σ_i точку K_i , которая, в свою очередь определяет направление движения преследователя \vec{V}_{P_i} .

Откуда следует выражение управляющего вектора преследователя в i — $ый$ момент времени:

$$\vec{u}_{P_i} = \frac{K_i - x_{P_i}}{|K_i - x_{P_i}|}.$$

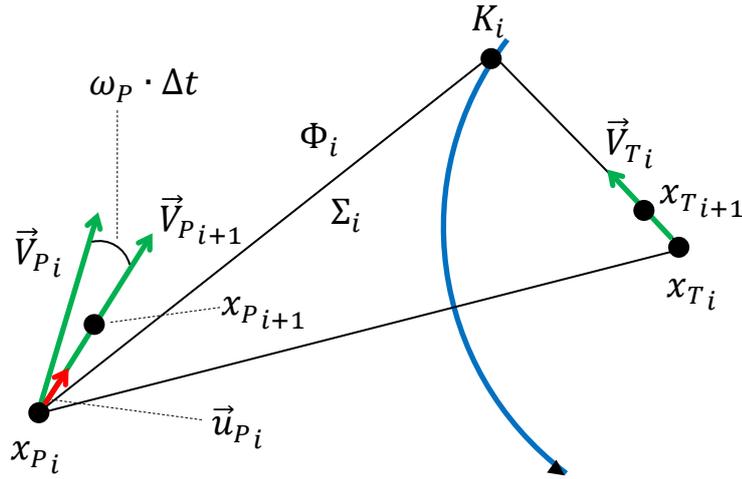


Рисунок 2.4 Стремление к методу параллельного сближения

Рассмотрим случай произвольного направления вектора скорости преследователя (Рисунок 2.4).

Как уже ранее говорилось, что линия визирования $(x_{P_i}x_{T_i})$ и вектор скорости цели \vec{V}_{T_i} задают плоскость Σ_i . Декартовы координаты преследователя и цели x_{P_i} , x_{T_i} , вектор скорости цели \vec{V}_{T_i} и модуль скорости преследователя $|\vec{V}_{P_i}|$ задают на плоскости Σ_i точку K_i .

Линия $(x_{T_i} K_i)$ и вектор скорости \vec{V}_{P_i} определяют плоскость Φ_i . Произведем поворот вектора \vec{V}_{P_i} на угол $\omega_P \cdot \Delta t$ в плоскости Φ_i :

$$\vec{V}_{P_{i+1}} = M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t) \cdot \vec{V}_{P_i}.$$

Где $M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t)$ — матрица пространственного поворота вектора \vec{V}_{P_i} на угол $\omega_P \cdot \Delta t$ в плоскости Φ_i .

Определение управляющего вектора производится следующим образом:

$$\vec{u}_{P_i} = \frac{\vec{V}_{P_{i+1}}}{|\vec{V}_{P_{i+1}}|}.$$

2.2. Частный случай описания динамических объектов при преследовании на поверхности

Рассмотрим задачу преследования на поверхности, заданной в явном виде:

$$x_3 = G(x_1, x_2).$$

В этом случае, система уравнений (2.3) задачи преследования в постановке Р. Айзекса в дискретной, антагонистической, позиционной задаче преследования с простым движением будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} x_{P_{i+1}} &= x_{P_i} + V_P \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_{P_i} & x_{T_{i+1}} &= x_{T_i} + V_T \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_{T_i} \\ \|\vec{u}_{P_i}\| &= 1 & \|\vec{u}_{T_i}\| &= 1 \\ \vec{u}_{P_{i+1}} &= F_{P_i}(\vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_i}) & \vec{u}_{T_{i+1}} &= F_{T_i}(\vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_i}) \\ x_{P_{3i}} &= G(x_{P_{1i}}, x_{P_{2i}}) & x_{T_{3i}} &= G(x_{T_{1i}}, x_{T_{2i}}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\vec{u}_{P_i} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \quad \vec{u}_{T_i} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} \\ \frac{\partial G}{\partial x_2} \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

В системе уравнений (2.4) $[x_{P_{1i}} \ x_{P_{2i}} \ x_{P_{3i}}]^T$, $[x_{T_{1i}} \ x_{T_{2i}} \ x_{T_{3i}}]^T$ – декартовы координаты преследователя и цели в i – *ый* момент времени. Кроме того, управляющие векторы $\vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_i}$ должны принадлежать касательным плоскостям к поверхности $x_3 = G(x_1, x_2)$ в точках нахождения преследователя и цели. Данному факту соответствуют два последних уравнения системы (2.4).

В постановке задачи преследования на поверхности используется ортогональная проекция точек и линий с поверхности на плоскость и обратно (Рисунок 2.5).

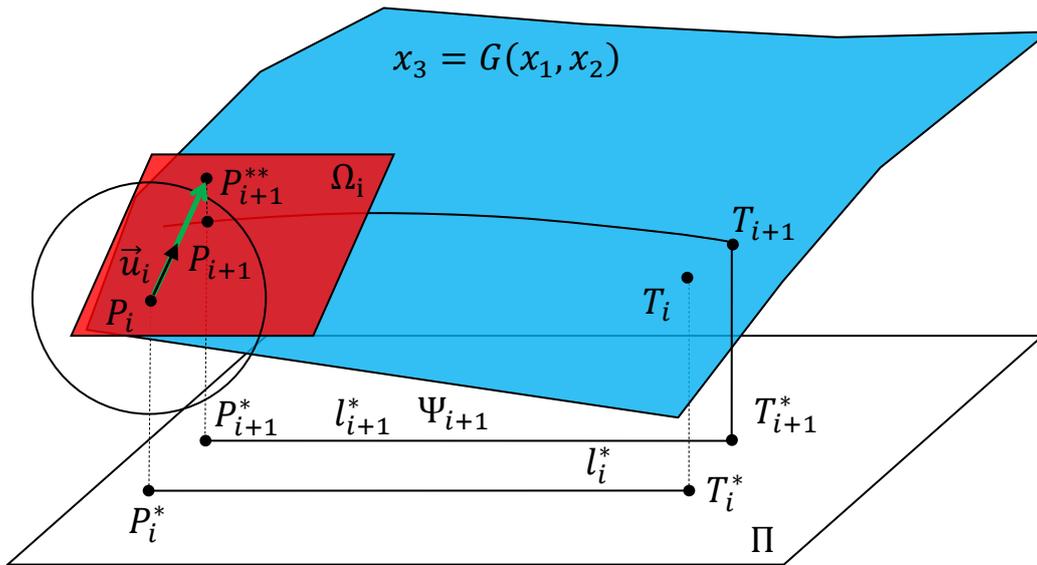


Рисунок 2.5 Метод параллельного сближения на поверхности

Рассмотрим метод параллельного сближения на поверхности $x_3 = G(x_1, x_2)$. Пусть преследователь и цель имеют на поверхности положения P_i и T_i , соответственно.

Пусть сделает шаг и перейдет к положению T_{i+1} на поверхности (Рисунок 2.5). На горизонтальной плоскости проекций Π соединим линией l_i^* ортогональные проекции преследователя и цели, P_i^* и T_i^* , соответственно.

Через ортогональную проекцию шага цели T_{i+1}^* проведем линию l_{i+1}^* параллельную линии l_i^* . Линия l_{i+1}^* и линии проецирования $(T_{i+1}T_{i+1}^*)$ определяют плоскость Ψ_{i+1} , ортогональную плоскости Π .

Поверхность $x_3 = G(x_1, x_2)$, плоскость Ψ_{i+1} и сфера радиуса $V_p \cdot \Delta t$ с центром в точке P_i определяют следующий шаг преследователя P_{i+1} , как точку пересечения этих поверхностей (Рисунок 2.5).

Опустим проекцию точки P_{i+1} на касательную плоскость Ω_i к поверхности $x_3 = G(x_1, x_2)$ в точке P_i и получим точку P_{i+1}^{**} . В результате управляющий вектор \vec{u}_i определяется как:

$$\vec{u}_i = \frac{P_{i+1}^{**} - P_i}{|P_{i+1}^{**} - P_i|}$$

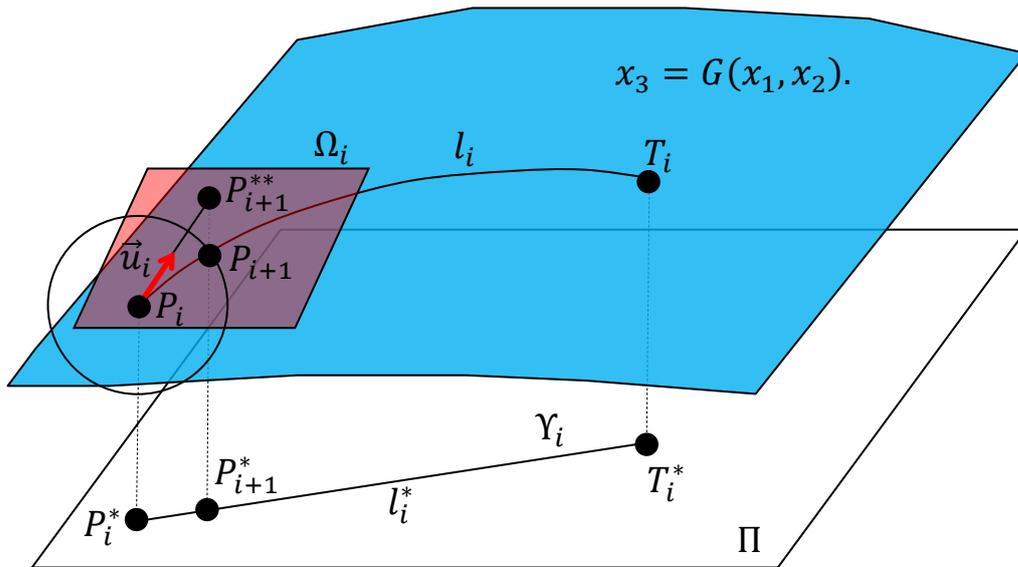


Рисунок 2.6 Метод погони на поверхности

Рассмотрим метод погони на поверхности $x_3 = G(x_1, x_2)$ (Рисунок 2.6). Пусть преследователь и цель занимают положения P_i и T_i , соответственно. Спроецируем на плоскость проекций Π и получим проекции P_i^* и T_i^* , соответственно.

Через точки P_i^* и T_i^* проведем линию l_i^* . Линия l_i^* и проецирующая прямая $(T_i T_i^*)$ определяет проецирующую плоскость Υ_i . Точка пересечения поверхности $x_3 = G(x_1, x_2)$, проецирующей плоскости Υ_i и сферы радиуса $V_p \cdot \Delta t$ с центром в точке P_i определяют следующий шаг преследователя P_{i+1} (Рисунок 2.6).

Также как и на рисунке 2.5, опустим проекцию точки P_{i+1} на касательную плоскость Ω_i к поверхности $x_3 = G(x_1, x_2)$ в точке P_i и получим точку P_{i+1}^{**} . В результате управляющий вектор \vec{u}_i определяется как:

$$\vec{u}_i = \frac{P_{i+1}^{**} - P_i}{|P_{i+1}^{**} - P_i|}$$

2.3. Частный случай описания динамических объектов при преследовании на плоскости

Произведем описание динамических объектов в задаче преследования на плоскости. Рассмотрим поведение преследователя в задаче с простым движением.

$$\begin{aligned} x_{P_{i+1}} &= x_{P_i} + V_P \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_{P_i} \\ \|\vec{u}_{P_i}\| &= 1 \\ \Phi_i(\vec{u}_{P_i}, \vec{u}_{T_i}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Динамика преследователя описывается системой дифференциальных уравнений (2.5).

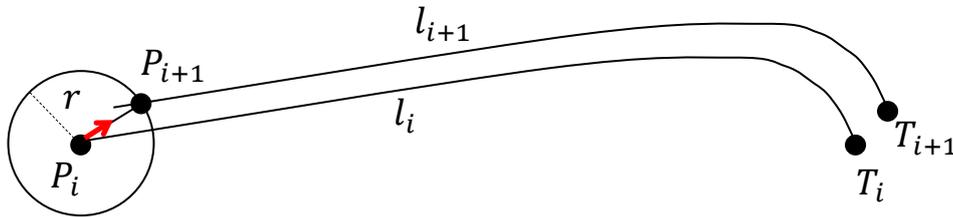


Рисунок 2.7 Следование прогнозируемым траекториям

Рассмотрим метод следования прогнозируемым траекториям. Пусть преследователь и цель находятся в точках P_i и T_i плоскости (Рисунок 2.7).

В i -ый момент времени точки P_i и T_i соединяет линия $l_i(s)$. Где s — формальный, не зависящий от времени, параметр.

Ее особенность состоит в том, что она проходит через точки P_i и T_i , а также входит в точку T_i под определенным углом. На рисунке 2.7 представлена ситуация, когда дискретное множество конгруэнтных линий $\{l_i\}$ сформиро-

вано следующим образом: $l_{i+1}(s) = l_i(s) + \vec{V}_{T_i} \cdot \Delta t$, где \vec{V}_{T_i} — вектор скорости цели в i -ый момент времени.

Следующий шаг преследователя P_{i+1} является точкой пересечения линии $l_{i+1}(s)$ с окружностью радиуса $r = V_p \cdot \Delta t$ с центром в точке P_i . Откуда мы имеем выражение для управляющего вектора:

$$\vec{u}_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|}.$$

Рассмотрим другой вариант следования прогнозируемым траекториям.

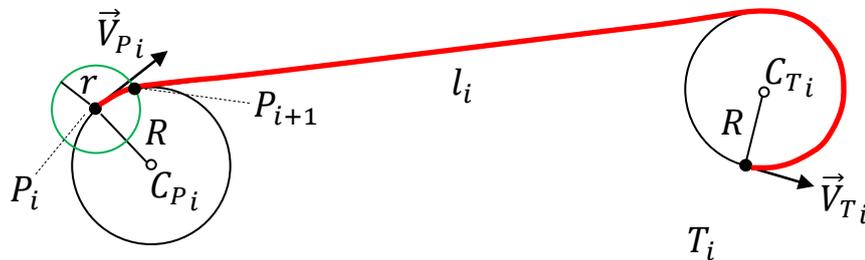


Рисунок 2.8 Моделирование прогнозируемой траектории

Пусть преследователь и цель находятся в точках P_i и T_i плоскости (Рисунок 2.8). Для преследователя вспомогательной задачей является моделирование такой траектории l_i , которая выходила бы из точки P_i в направлении вектора скорости преследователя \vec{V}_{P_i} и заходила бы в точку T_i в направлении противоположном направлению вектору скорости цели \vec{V}_{T_i} . При этом должны соблюдаться ограничения по кривизне траектории l_i .

Такую краевую задачу можно решить эластик Эйлера, спиралей Корню или других инструментов. Поскольку, линия l_i служит инструкцией для шага преследователя, то можно ограничиться сегментов окружностей и прямыми.

Следующий шаг преследователя есть точка P_{i+1} пересечения линии l_i с окружностью радиуса $r = V_p \cdot \Delta t$ с центром в точке P_i . Откуда мы имеем выражение для управляющего вектора:

$$\vec{u}_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|}$$

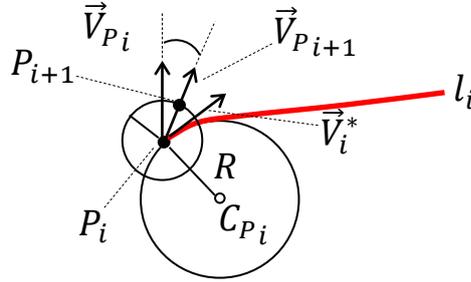


Рисунок 2.9 Коррекция направления движения преследователя

Рассмотрим метод коррекции направления движения преследователя. Пусть преследователь находится в точке P_i , имея при этом вектор скорости \vec{V}_{P_i} . Преследователь стремится перейти на прогнозируемую траекторию движения l_i (Рисунок 2.9). В i – *ый* момент времени траектория l_i проходит через точку P_i . Если бы преследователь двигался по траектории l_i , то имел бы скорость \vec{V}_i^* . Стремление перейти на траекторию l_i выражается в повороте вектора скорости \vec{V}_{P_i} на угол $\omega_P \cdot \Delta t$. Из этого мы имеем выражение для управляющего вектора:

$$\vec{u}_i = \frac{M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t) \cdot \vec{V}_{P_i}}{|M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t) \cdot \vec{V}_{P_i}|}$$

Где $M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t)$ — матрица поворота вектора \vec{V}_{P_i} на угол $\omega_P \cdot \Delta t$, а ω_P — допустимая частота углового вращения преследователя.

Следующий шаг преследователя вычисляется по формуле:

$$P_{i+1} = P_i + V_P \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_{P_i}$$

2.4. Некоторые видоизменения основной модели

Рассмотрим модель поведения цели, когда ей недоступна информация о векторе скорости преследователя, угловой скорости вращения и координатах нахождения преследователя на плоскости. То есть цели доступна минимальная информация о линии визирования, линии, соединяющей преследователя и цель.

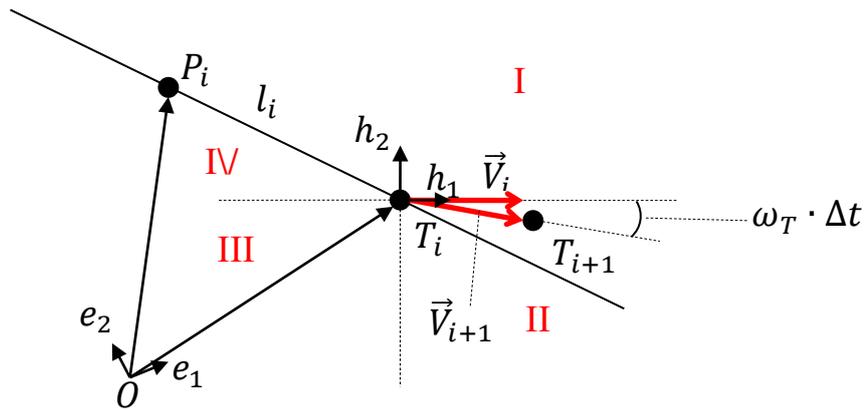


Рисунок 2.10 Адаптивное поведение цели

На рисунке 2.10 представлена адаптивная модель поведения цели T_i . Если в локальной динамической системе координат $(h_1 T_i h_2)$, образованной точкой нахождения цели T_i и вектором скорости цели \vec{V}_i , линия визирования, соединяющая преследователя и цель $(P_i T_i)$, принадлежит второй и четвертой четверти системы координат $(h_1 T_i h_2)$, то вектор скорости цели вращается по часовой стрелке на угол $\omega_T \cdot \Delta t$, ω_T — допустимая частота углового вращения цели. Выражение для скорости будет таким:

$$\vec{V}_{i+1} = M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t) \cdot \vec{V}_{P_i}.$$

Выражение для вектора управления будет таким:

$$\vec{u}_i = \frac{M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t) \cdot \vec{V}_{P_i}}{|M_{P_i}(\omega_P \cdot \Delta t) \cdot \vec{V}_{P_i}|}.$$

Следующий шаг цели вычисляется по формуле:

$$T_{i+1} = T_i + V \cdot \Delta t \cdot \vec{u}_{P_i}$$

Если линия визирования $(P_i T_i)$ будет находиться в первой и третьей четвертях системы координат $(h_1 T_i h_2)$, то поворот скорости цели будет совершаться против часовой стрелки.

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении поведения преследователя.

Данное видоизменение можно рассматривать как дополнение к основной модели задачи преследования, реализующее факт переключения в режим маневрирования объектов.

В диссертационном исследовании реализованы такие модели поведения преследователя и цели на поверхности. Для этого выполнялись ортогональные проекции оппонентов по задаче преследования на касательные плоскости к поверхности движения в местах нахождения участников.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 2

В данной главе был произведен переход от непрерывной модели задачи преследования к дискретной модели. Рассмотрены задачи преследования в пространстве, на поверхности и на плоскости на предмет представления модели в дискретном виде.

Исследовалось преследование методами параллельного сближения и погони. Также рассмотрены методы следования прогнозируемым траекториям и методы коррекции направления движения.

Движение преследователей и целей в моделях происходит с постоянной скоростью. Движение с переменной скоростью в математических моделях работы допустимо, по крайней мере, в моделях нет строго требования движения с постоянной скоростью.

В дискретных моделях исследования рассчитывается управляющие векторы, для участников задачи преследования в определенный момент времени. В математических дискретных моделях работы смысл управляющего вектора

преследователя и цели совпадал со смыслом единичного вектора направления скорости движения.

Одним из отличительных свойств, предлагаемых моделей, является то, преследователи и цели обладают ограничениями по кривизне своих траекторий движения.

При расчете траектории движения преследователя в каждый момент времени строится траектория возможного движения. Управляющий вектор преследователя рассчитывается таким образом, чтобы учитывая максимальную угловую скорость вращения, приблизиться к траектории возможного движения.

Задачи, представленные в диссертационном исследовании, объединяет тот факт, что стратегия выбора управляющего вектора в дифференциальной игре, как функция геометрического описания пресечения поверхностей и линий.

В диссертационном исследовании рассматривается поведение преследователя и цели. Производится расчет траекторий и положений объектов в определенные моменты времени. Производится расчет векторов скоростей и векторов вращений объектов.

В заключение отметим, что дискретная модель стремления к прогнозируемым траекториям предполагает проектирование траекторий таким образом, чтобы они достигали целей под заданными углами или в заданные моменты времени.

При написании главы дополнительно были использованы источники [61], [62], [63], [64], [65], [66].

ГЛАВА 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПИСАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Метод параллельного сближения является оптимальным методом преследования на плоскости в том, что он обеспечивает минимальное время достижения цели преследователем. Это показано в работах Петросяна Л.А. [2, 56, 67, 68, 69].

Метод параллельного сближения используется при наведении летальных аппаратов на цель. В этом случае линия, соединяющая преследователя и цель (линия визирования), при перемещении всегда сохраняет параллельность своему первоначальному положению.

Как и на плоскости, так и в пространстве, направления скоростей преследователя и цели пересекаются в точке на окружности Аполлония.

То есть направление скорости преследователя однозначно определяется расположением преследователя и цели, направлением и величиной скорости цели, а также величиной скорости преследователя.

В рамках настоящей главы нами предложена модификация метода параллельного сближения в случае произвольного направления вектора скорости преследователя.

3.1. Модифицированные модели преследования объектов при параллельном сближении

В данном разделе представлена квазидискретная геометрическая модель задачи преследования с простым движением на плоскости методом параллельного сближения. Строится окружность Аполлония и связанные с ней характеристические линии для каждого момента времени. В данной геометрической модели для предопределенной траектории цели находится оптимальная траектория преследователя. Моделирование производилось в

системе компьютерной математики MathCAD. По результатам моделирования был изготовлен анимационный ролик, где можно посмотреть перемещение и преобразование окружности Аполлония и связанных с ней характеристических точек и линий.

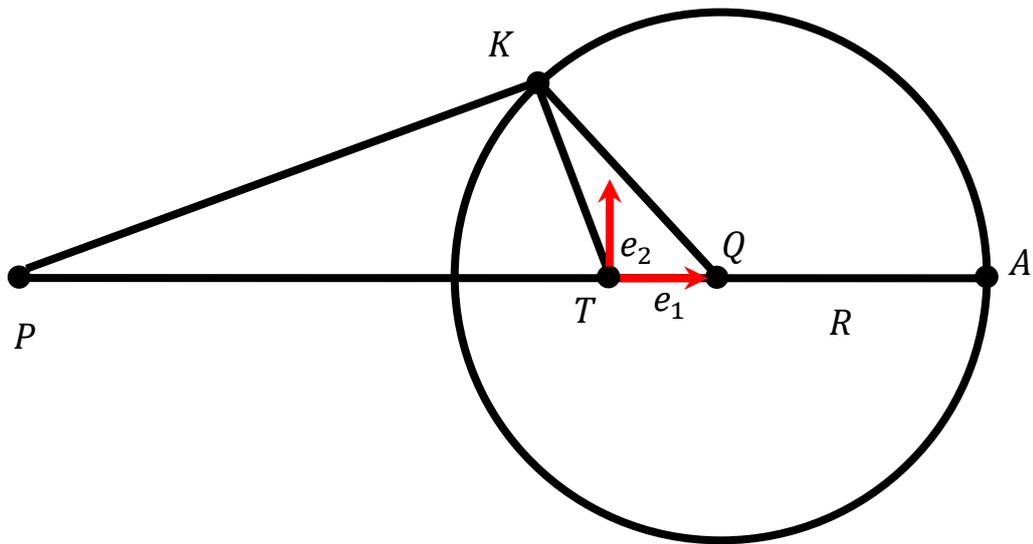


Рисунок 3.1 — Окружность Аполлония

Окружности Аполлония применяются при решении задач простого преследования на плоскости, используя стратегии параллельного сближения. Простым движением в задачах преследования точки называется такое движение, при котором пройденное расстояние S является линейной функцией времени: $S(t) = v \cdot t$, где $v = Const$ — модуль скорости точки.

Окружность Аполлония — это геометрическое место точек плоскости, когда $|KP|/|KT| = Const$ (Рисунок 3.1).

Применительно к задачам преследования окружность Аполлония содержит следующую идею. Если преследователь и цель в определенный момент времени имеют положения на плоскости P и T , и значения скоростей, равные по модулю V_P и V_T , соответственно.

Тогда геометрическое множество точек K , как место возможных встреч преследователя P с целью T , является окружностью радиуса $|QK|$ с центром в

точке Q [2].

Направления скоростей преследователя и цели являются взаимосвязанными. То есть направление скорости цели диктует направление скорости преследователя или наоборот, направление преследователя определяет направление цели, чтобы обеспечить встречу в точках, принадлежащих окружности Аполлония.

Целью данного параграфа диссертации является формализация и алгоритмизация метода параллельного сближения преследователя и цели.

То, что данное множество точек K является окружностью, было известно еще древним математикам, но мы приведем выкладки расчета окружности и ее центра.

Введем ортонормированную систему координат (e_1, e_2) с центром в точке T (Рисунок 1), вектор e_1 сонаправлен вектору PT . Пусть $K = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, а $P = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}$, где $a = |PT|$. Тогда $|TK| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а $|PK| = |K - P| = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$. Из условия того, что преследователь и цель приходят в точку K одновременно, имеем следующее: $\frac{|PK|}{V_P} = \frac{|TK|}{V_T}$. Откуда следует, что $V_T \cdot \sqrt{(x + a)^2 + y^2} = V_P \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$. После возведения в квадрат и раскрытия скобок получаем следующее уравнение:

$$\left(x - \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a\right)^2 + y^2 = \left(\frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a\right)^2.$$

Полученное уравнение в системе (e_1, e_2) с центром в точке T описывает окружность радиуса R и с центром в точке Q :

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a \\ 0 \end{bmatrix}, R = \frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a, a = |PT|.$$

Отметим одну характеристическую точку, называемой точкой Аполлония:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a + \frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

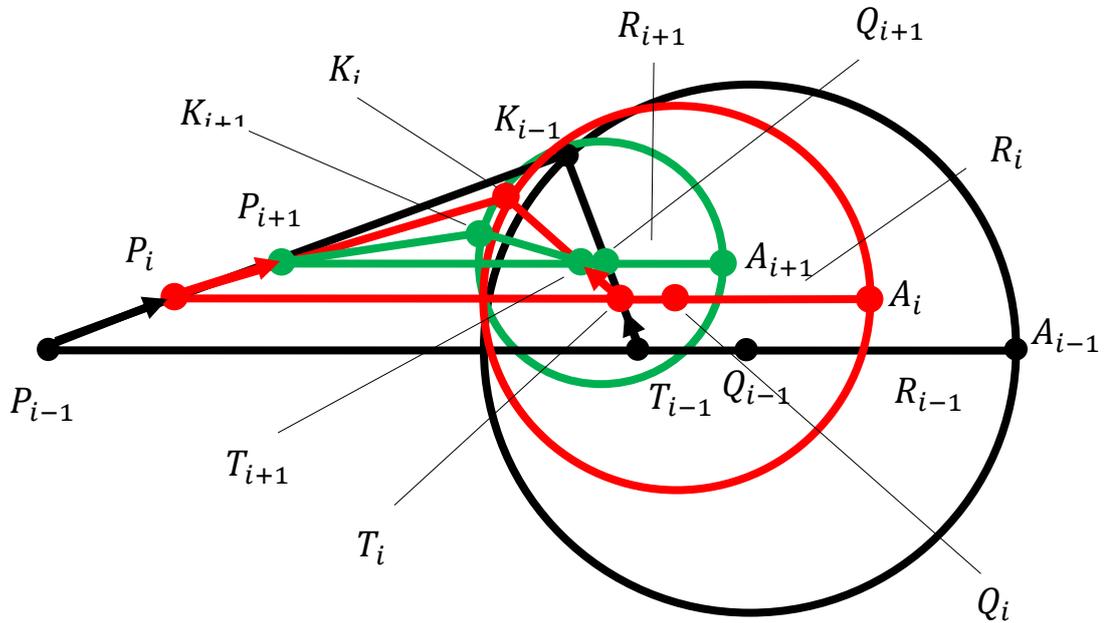


Рисунок 3.2 — Итерационная схема

Факт того, что стратегия преследователя в задаче преследования при помощи метода параллельного сближения, является оптимальной в плане минимизации времени поимки цели доказан в работах Петросяна Л.О. [2, 56, 67, 68, 69].

Будем считать, что для нашего итерационного процесса известны начальные данные P_0 и T_0 . Скорости преследователя и цели постоянны и равны по модулю V_P и V_T , соответственно.

Траектория цели в нашей модели является предопределенной, поэтому мы сможем рассчитать массив точек $\{T_i\}$, где дистанция между точками T_i и T_{i+1} равна:

$$|T_{i+1} - T_i| = V_T \cdot \Delta T, \Delta T - \text{период дискретизации по времени.}$$

Итерационная схема расчета координат преследователя, координат центров окружностей Аполлония, радиусов окружностей Аполлония, характеристических точек представлена на рисунке 3.2.

Координаты преследователя на i — ом шаге итераций будут выглядеть следующим образом:

$$P_i = P_{i-1} + V_P \cdot \Delta T \cdot \frac{K_{i-1} - P_{i-1}}{|K_{i-1} - P_{i-1}|}.$$

Радиус окружности Аполлония:

$$R_i = \frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot |T_i - P_i|.$$

Центр окружности Аполлония рассчитывается таким образом:

$$Q_i = T_i + \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot (T_i - P_i).$$

Координаты точки K_i есть продукт решения системы уравнений относительно непрерывного параметра t :

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + V_T \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{|T_{i+1} - T_i|} \cdot t. \end{cases}$$

Разрешенная относительно параметра t , вышеуказанная система представляет собой корни квадратного уравнения, вывод которых не приводится из-за громоздких выражений.

То, что отрезок $[P_i, T_i]$ останется параллельным отрезку $[P_0, T_0]$, не вызывает сомнений. Рассмотрим первый отрезок $[P_1, T_1]$.

Координаты точек P_1 и T_1 равны (Рисунок 3.3):

$$P_1 = P_0 + V_P \cdot \frac{P_0 K_0}{|P_0 K_0|} \cdot \Delta T$$

$$T_1 = T_0 + V_T \cdot \frac{T_0 K_0}{|T_0 K_0|} \cdot \Delta T$$

Исходя из того, что преследователь и цель должны придти в точку K на окружности Аполлония одновременно, мы вправе сделать вывод, что:

$$\frac{V_P}{|P_0K_0|} \cdot \Delta T = \frac{V_T}{|T_0K_0|} \cdot \Delta T = \varepsilon.$$

Далее:

$$P_1T_1 = T_1 - P_1 = (T_0 - P_0) + \varepsilon \cdot T_0K_0 - \varepsilon \cdot P_0K_0 = (1 - \varepsilon) \cdot (T_0 - P_0).$$

Другими словами, вектор P_1T_1 сонаправлен вектору P_0T_0 и перпендикулярен вектору нормали N (Рисунок 3.3).

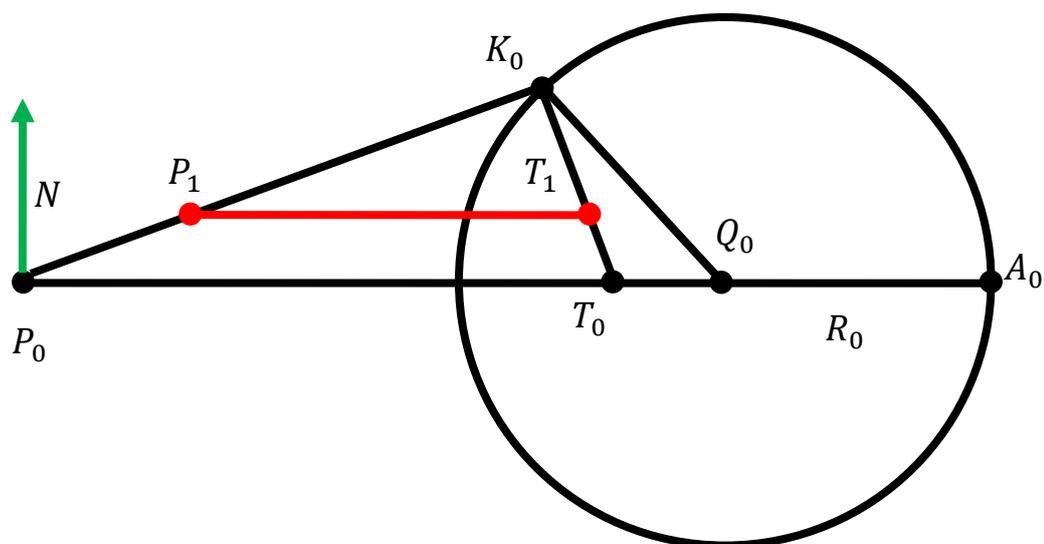


Рисунок 3.3 — Параллельное сближение преследователя и цели

На рисунке 3.4 видно, что отрезки $[P_i, T_i]$ образуют однопараметрическую последовательность параллельных $[P_0, T_0]$ линий.

Также на рисунке 3.4 показано, точки P_i, T_i, Q_i, A_i принадлежат одной прямой. Показан подвижный треугольник P_i, Q_i, K_i , который сходится к точке встречи преследователя и цели.

Рассматривая рисунок 3.4, а именно на однопараметрическое множество окружностей Аполлония, сходящееся к точке встречи, может возникнуть обманчивое впечатление, все множество окружностей все касается в точке встречи преследователя и цели. В следующей модели с иной траекторией цели мы покажем, что это не так.

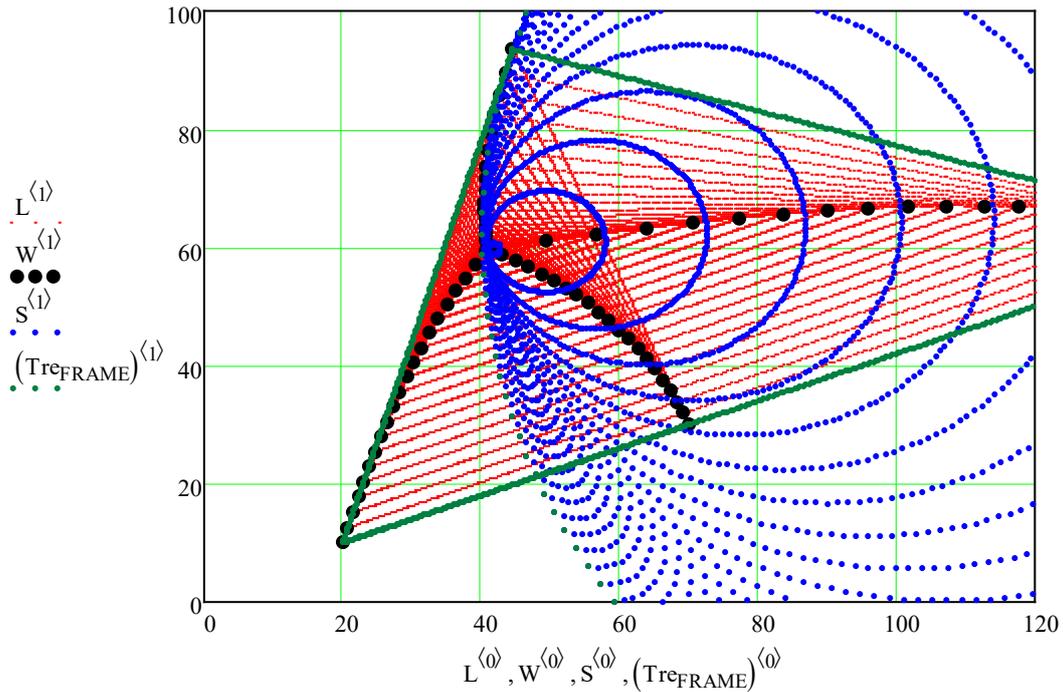


Рисунок 3.4 — Перехват цели

Рисунок 3.4 дополнен ссылкой на анимированное изображение [70], где можно посмотреть, как изменяется во времени расположение преследователя, цели, точек на окружности Аполлония.

Итак, ситуацию, представленную на рисунке 3.4, можно интерпретировать как моделирование перехвата преследователем цели.

Ситуацию, представленную на рисунке 3.5, можно интерпретировать как моделирование процесса убегания цели от преследователя [71].

На рисунке 3.5 также показан подвижный треугольник P_i, Q_i, K_i , точки P_i, T_i, Q_i, A_i и окружности Аполлония. Обратим внимание на поведение точки K_i , оно похоже на поведение точки возврата второго рода. Здесь как раз наблюдается схождение окружностей Аполлония к точке встречи преследователя и цели, но множество окружностей не является касательными в одной точке [71].

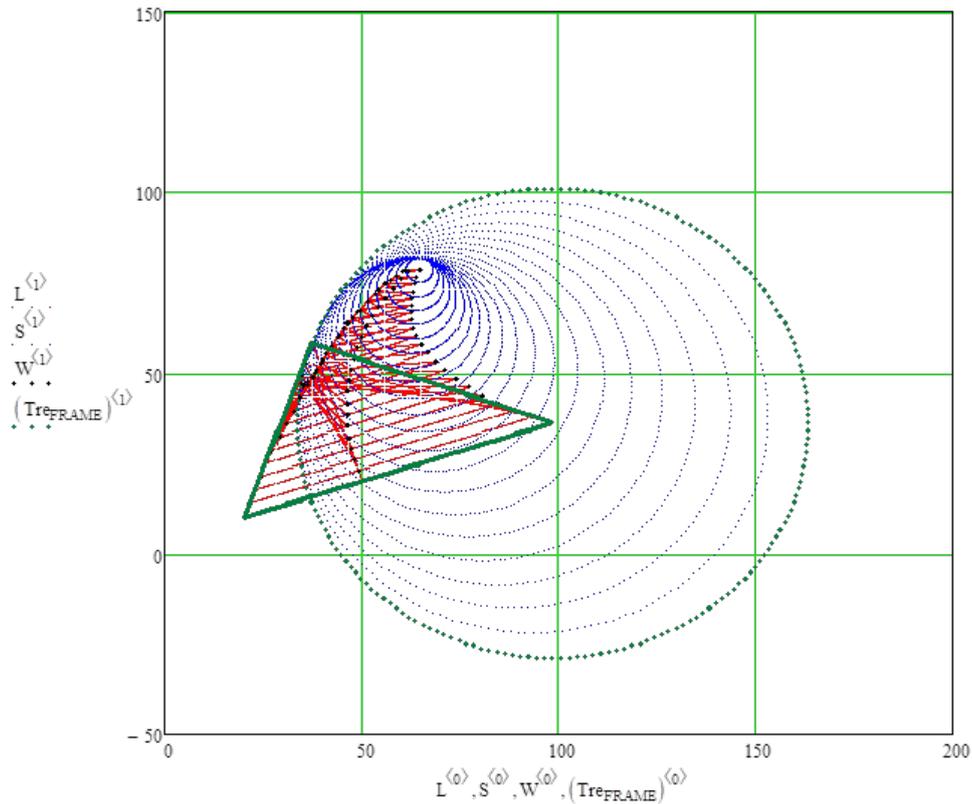


Рисунок 3.5 — Моделирование убегания цели от преследователя

Рисунок 3.5 также дополнен ссылкой на анимированное изображение.

Целью модели рисунка 3.5 являлось показать движение всех характеристических линий и точек в реализации метода параллельного сближения в задачах простого преследования на плоскости. Показано, движение окружности Аполлония, ее схождение к точке встречи преследователя и цели. Продемонстрировано, как сходится отрезок, соединяющий преследователя и цель, будучи параллелен самому себе.

При геометрическом моделировании методом параллельного сближения не обязательно вычислять параметры окружности Аполлония. Достаточно будет строить однопараметрическое множество параллельных линий, соединяющих преследователя и цель, окружность, с радиусом равным шагу преследователя, чтобы найти точку следующего положения преследователя.

В данном параграфе рассматривается модель задачи преследования методом параллельного сближения. Целью исследования является модификация метода параллельного сближения для того, чтобы учитывать случай, когда в момент начала преследования вектор скорости преследователя направлен не на цель. Кроме того, в рассматриваемой в модели, преследователь не может мгновенно изменять направление движения. То есть происходит наложение условия, что радиус кривизны траектории движения преследователя не может быть меньше определенной величины. Предлагаемый метод основан на том, преследователь, выбирая шаг на этапе итераций, будет стараться следовать прогнозируемым траекториям. По материалам главы написана тестовая программа, которая рассчитывает траекторию преследователя, учитывая изложенные условия. Выполненное анимированное изображение визуализирует изменение координат преследователя, цели и прогнозируемых траекторий от времени.

В описании задачи преследования методом параллельного сближения в трудах Петросяна Л. О. [2, 56, 67, 68, 69] направление вектора скорости преследователя P и направление вектора скорости цели T пересекаются в одной точке K , принадлежащей окружности Аполлония (Рисунок 3.1).

Для точек P и T точка K окружности Аполлония характерна тем, отношение длин:

$$\frac{|PK|}{|QK|} = \frac{|V_P|}{|V_T|}$$

есть отношение модулей скоростей преследователя и цели.

При квазидискретном моделировании точек траектории преследователя $\{P_i\}$ можно предложить следующую итерационную схему (Рисунок 3.2):

$$P_i = P_{i-1} + V_P \cdot \Delta T \cdot \frac{K_{i-1} - P_{i-1}}{|K_{i-1} - P_{i-1}|}$$

Радиус окружностей Аполлония будут такими:

$$R_i = \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot |T_i - P_i|.$$

Центры окружностей Аполлония рассчитываются так:

$$Q_i = T_i + \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot (T_i - P_i).$$

Координаты точки K_i есть продукт решения системы уравнений относительно непрерывного параметра t :

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + V_T \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{|T_{i+1} - T_i|} \cdot t. \end{cases}$$

Такова одна из квазидискретных моделей построения траектории преследователя. Она требует, чтобы направления векторов движения преследователя и цели пересекались в точках, принадлежащим окружностям Аполлония.

Если рассмотреть итерационную схему, представленную на рисунке 2.2, то мы видим что на каждом шаге итераций линии, соединяющие преследователя и цель $(P_i T_i)$, всегда параллельны между собой.

В источниках [2], [56] приводится доказательство этого факта. Но мы все же приведем его здесь.

Рассмотрим отрезок $[P_i, T_i]$. Координаты точек P_1 и T_1 равны (Рисунок 3.2):

$$\begin{aligned} P_i &= P_{i-1} + V_P \cdot \frac{P_{i-1} K_{i-1}}{|P_{i-1} K_{i-1}|} \cdot \Delta T \\ T_i &= T_{i-1} + V_T \cdot \frac{T_{i-1} K_{i-1}}{|T_{i-1} K_{i-1}|} \cdot \Delta T \end{aligned}$$

Исходя из того, что преследователь и цель должны прийти в точку K_{i-1} на окружности Аполлония одновременно, мы вправе сделать вывод, что:

$$\frac{V_P}{|P_{i-1} K_{i-1}|} \cdot \Delta T = \frac{V_T}{|T_{i-1} K_{i-1}|} \cdot \Delta T = \varepsilon.$$

Далее:

$$\begin{aligned} P_i T_i = T_i - P_i &= (T_{i-1} - P_{i-1}) + \varepsilon \cdot T_{i-1} K_{i-1} - \varepsilon \cdot P_{i-1} K_{i-1} \\ &= (1 - \varepsilon) \cdot (T_{i-1} - P_{i-1}). \end{aligned}$$

Другими словами, вектор $P_i T_i$ сонаправлен вектору $P_{i-1} T_{i-1}$ (Рисунок 3.2).

Данная модель нахождения траектории преследователя не позволяет моделировать, если точка пересечения направлений векторов движения не принадлежит окружности Аполлония для заданной пары точек преследователя и цели. Целью работы является разработка метода решения именно такой задачи.

Итерационную схему, представленную на рисунке 3.2, можно интерпретировать иначе.

На рисунке 3.6 представлен итерационный процесс, определяющий координаты точки P_i при известных координатах точек P_{i-1}, T_{i-1}, T_i и скоростей преследователя и цели, V_P и V_T , соответственно.

Другими словами, линия визирования, соединяющая преследователя и цель, в процессе перемещения остается параллельной своему первоначальному положению.

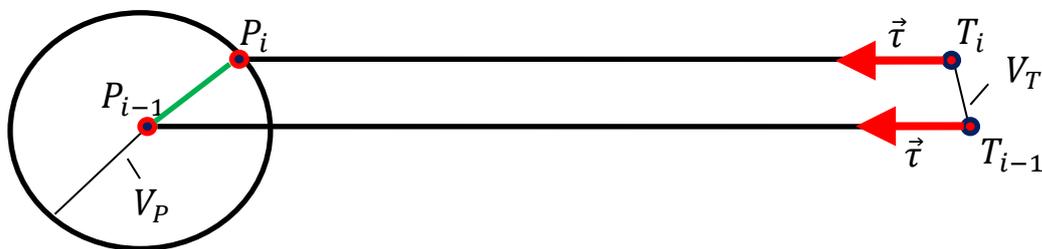


Рисунок 3.6 Интерпретация итерационной схемы

Сначала определяется единичный вектор:

$$\vec{t} = \frac{T_{i-1} - P_{i-1}}{|T_{i-1} - P_{i-1}|}$$

Координаты точки $T_i = T_{i-1} + \vec{V}_T \cdot \Delta T$, ΔT – период дискретизации, предопределены поведением цели. Тогда прямую линию, которая будет соединять точки P_i и T_i , можно представить в виде $L(\mu) = T_i + \mu \cdot \vec{t}$. Тогда координаты P_i следующего шага итераций траектории преследователя можно ин-

терпретировать как точку окружности радиуса $V_P \cdot \Delta T$ с центром в точке P_{i-1} и прямой линии $L(\mu)$:

$$\begin{cases} (L(\mu) - P_{i-1})^2 = (V_P \cdot \Delta T)^2 \\ L(\mu) = T_i + \mu \cdot \vec{t} \end{cases}.$$

Решение вышеприведенной системы уравнений относительно параметра μ даст такое значение параметра, при котором будет выполняться следующее:
 $P_i = T_i + \mu \cdot \vec{t}$.

Такая интерпретация итерационной схемы параллельного сближения позволяет перейти к расчету траектории преследователя, когда в момент начала преследования скорость преследователя направлена не на точку на окружности Аполлония.

Итерационную схему параллельного сближения мы предлагаем модифицировать следующим образом. Пусть в момент начала сближения вектор скорости преследователя P_{i-1} направлен произвольным образом, но не в точку на соответствующей паре точек $\{P_{i-1}, T_{i-1}\}$ окружности Аполлония (Рисунок 3.7).

В силу инертности преследователя, минимальный радиус кривизны траектории не может быть меньше определенного значения r_c . Точке преследователя P_{i-1} соответствуют вектор скорости $\vec{V}_{P_{i-1}}$ и вектор единичной нормали \vec{n}_{i-1} , $\vec{V}_{P_{i-1}} \cdot \vec{n}_{i-1} = 0$.

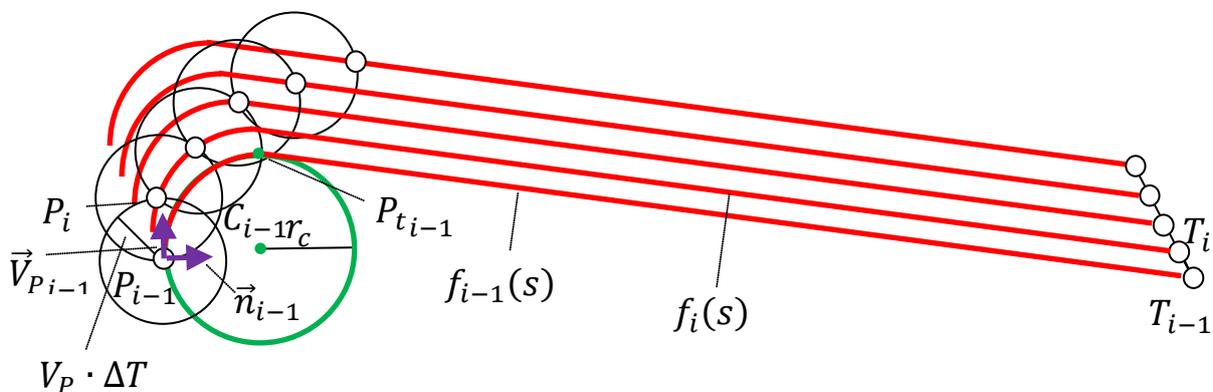


Рисунок 3.7 Квазидискретная модель параллельного сближения

Далее, находится центр окружности радиуса r_c : $C_{i-1} = P_{i-1} + V_P \cdot \Delta T \cdot \vec{n}_{i-1}$. К построенной окружности строится касательная из точки T_{i-1} для нахождения точки $P_{t_{i-1}}$ сопряжения прямой и окружности (Рисунок 2.7).

Дугу окружности $\overline{P_{i-1}P_{t_{i-1}}}$ и отрезок $[P_{t_{i-1}}T_{i-1}]$ будем считать одной составной кривой линией $f_{i-1}(s)$, где параметром s служит длина дуги нашей параметрической кривой. Выбор в качестве параметра длины дуги вполне обоснован потому, что сегментами составной кривой могут служить не только отрезок прямой и дуги окружности, но и, к примеру, кривые Безье или кубические параболы.

Следует отметить, что в программе, написанной по материалам главы, отсчет длины дуги начинается от точки T_{i-1} , $f_{i-1}(0) = T_{i-1}$.

Производим параллельный перенос линии $f_{i-1}(s)$ на вектор $T_i - T_{i-1}$. Положение точки T_i известно и полностью определяется поведением цели. В рамках решения нашей задачи будем считать поведение цели полностью детерминированным.

Уравнение линии параллельной линии $f_i(s) = f_{i-1}(s) + T_i - T_{i-1}$ будем считать известным и для нахождения точки P_i следующего шага преследователя, необходимо решение следующей системы уравнений и неравенств относительно параметра s :

$$\begin{cases} (f_i(s) - P_{i-1})^2 = (V_P \cdot \Delta T)^2 \\ f_i(s) = f_{i-1}(s) + T_i - T_{i-1} \\ 0 \leq s < s_{i-1} \end{cases}$$

Где s_{i-1} — это значение параметра s , соответствующее точке P_{i-1} .

При реализации кинематической модели задачи преследования методом параллельного сближения был выбран пакет компьютерной математики MathCAD 15. Отметим некоторые особенности тестовой программы.

Первое, что мы сделали в нашей программе, мы для составной кривой в момент начала преследования, состоящей из дуги и отрезка, выполнили параметризацию от длины дуги. Для этого нам необходимо было получить упоря-

доченный набор точек $\{x_i, y_i\}$. По каждой координате встроенными средствами MathCAD, выполнили кубическую сплайн-интерполяцию от формального параметра δ и получили функции $X(\delta), Y(\delta), i \in [0, N - 1], \delta_i \leq \delta \leq \delta_{i+1}$, где $\delta_i = i$, а N – количество элементов массивов $\{x_i, y_i\}$.

Далее, был составлен Якобиан для передачи во встроенные решатели обыкновенных дифференциальных уравнений системы MathCAD:

$$D(s, \delta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{dX^2}{d\delta} + \frac{dY^2}{d\delta}}}$$

Полученное решение методом Рунге-Кутты четвертого порядка выражает зависимость массивов $\{x_i, y_i\}$ от параметра длины дуги s . Таким образом, мы считаем, что уравнение базовой кривой, с которой мы будем совершать параллельный перенос, получено (Рисунок 3.8).

Далее, нам предстоит создать вычислительный цикл, в котором решалась система уравнений и неравенств. Данная задача сводится к численному решению уравнения поиском нулей функции методом секущей в заданном диапазоне.

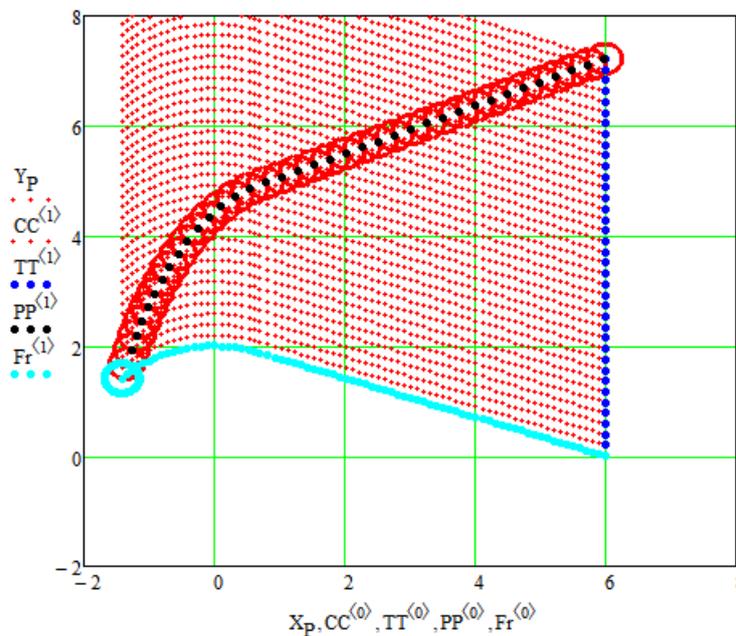


Рисунок 3.8 Кинематическая модель параллельного сближения

Встроенные средства численного решения уравнений системы MathCAD позволяют это решить при помощи процедуры *root*. Процедурой *root* решается в вычислительном цикле уравнение:

$$(f_{i-1}(s) + T_i - T_{i-1} - P_{i-1})^2 - (V_p \cdot \Delta T)^2 = 0, \text{ в диапазоне } s \in [0, s_{i-1}].$$

На рисунке 2.8 представлены результаты моделирования тестовой программы. Рисунок 2.8 дополнен ссылкой на анимированное изображение [72], где в динамике можно будет посмотреть процесс методом параллельного сближения.

В модели выбрана траектория движения цели в виде прямой линии. В результатах этих экспериментов выяснено следующее. Если в начале движения, скорость преследователя направлена на точку на окружности Аполлония, то время достижения цели будет всегда меньше времени, если бы преследование выполнялось бы методом погони с теми же параметрами. В нашем случае, описываемый нами метод, не является оптимальным, но перспективность в плане группового преследования с разными скоростями из разных точек, но с одновременным достижением цели, несомненна.

В данном разделе рассматривается кинематическая модель задачи преследования на плоскости методом погони, когда в момент начала преследования скорость преследователя направлена не на цель.

Данный метод возможен для использования при разработке геометрической модели группового преследования с одновременным достижением цели или целей. Также возможно использование при разработке моделей, когда преследователь методом параллельного сближения достигает цели под заданными углами.

Данный метод моделирования задач преследования методом параллельного сближения может быть востребован при проектировании БПЛА с автономным управлением.

3.1.1. Модель модификации метода параллельного сближения на поверхности

Рассмотрим модель задачи преследования на поверхности методом параллельного сближения. Моделирование итерационных процессов в задачах преследования является актуальным с развитием автономных беспилотных объектов. Целью данного параграфа являлась разработка модели, в которой траектория преследователя есть результат следования прогнозируемым маршрутам в каждый момент времени. Моделировались ситуации с различными исходными состояниями.

Ранее, в работах Петросяна Л. О. [2, 56] рассматривался метод параллельного сближения на плоскости, в которых было показано, что данный метод является оптимальным для достижения преследователем маневрирующей цели.

Задачу преследования на плоскости методом параллельного сближения можно интерпретировать так, как показано на рисунке 3.6:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\tau} = \frac{Target_{i-1} - Pers_{i-1}}{|Target_{i-1} - Pers_{i-1}|} \\ L(\mu) = Target_i + \mu \cdot \vec{\tau} \\ (L(\mu) - Pers_{i-1})^2 = (V_p \cdot \Delta T)^2 \end{array} \right. .$$

Если цель совершает шаг: $Target_i = Target_{i-1} + \vec{V}_T \cdot \Delta T$, то из точки $Target_i$ проводится линия $L(u)$ и ищется ее точка пересечения с окружностью радиуса $V_p \cdot \Delta T$ с центром в точке $Pers_{i-1}$.

В этом параграфе работы предлагается модель подобной итерационной схемы, но уже в пространстве на поверхности.

В данном разделе рассматривается итерационная модель последовательного расчета точек траектории преследователя методом, который в проекции на горизонтальную плоскость аналогичен методу параллельного сближения.

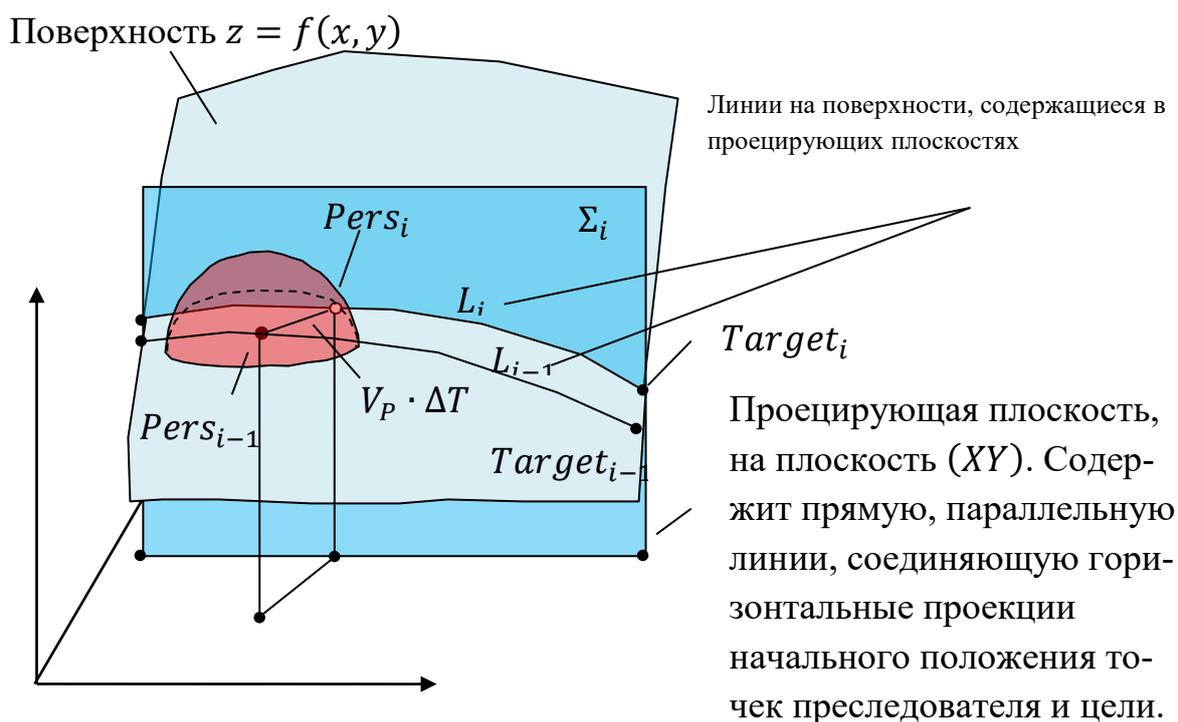


Рисунок 3.9 Расчет следующего шага итерационного процесса

Для расчета следующего шага итераций в точке нахождения преследователя $Pers_{i-1}$ на поверхности $z = f(x, y)$ строится сфера S_{i-1} радиуса $V_P \cdot \Delta T$ (Рисунок 3.9). Затем, ищется точка $Pers_i$ пересечения сферы S_{i-1} с линией L_i , которая и является искомой точкой следующего шага. В точке нахождения $Target_i$ цели строится проецирующая плоскость Σ_i , которая является параллельной линии, соединяющей горизонтальные проекции начальных положений точек $Pers_0$ и $Target_0$, преследователя и цели. Линия L_i есть продукт пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости Σ_i .

Будем считать, что поверхность передвижения преследователя и цели, задана в явном виде $z = f(x, y)$. Вообще, предлагаемая к рассмотрению геометрическая модель, будет работать, когда преследователь и цель будут оказывать взаимное влияние на поведение друг друга. Траектория цели предподре-

делена и задается проекцией на плоскость (XY) в виде функций $x_t(t)$ и $y_t(t)$. Где t — формальный параметр. После обработки проекции получаем уравнение траектории цели:

$$Target(s) = \begin{bmatrix} x_t(t(s)) \\ y_t(t(s)) \\ f(x_t(t(s)), y_t(t(s))) \end{bmatrix}, \text{ где } s - \text{ параметр длины дуги.}$$

Полный дифференциал длины дуги будет таким: $ds^2 = dx_t^2 + dy_t^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_t} \cdot dx_t + \frac{\partial f}{\partial y_t} \cdot dy_t\right)^2$. Откуда мы приходим к дифференциальному уравнению:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\frac{dx_t^2}{dt} + \frac{dy_t^2}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial x_t} \cdot \frac{dx_t}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y_t} \cdot \frac{dy_t}{dt}\right)^2}}.$$

Данное уравнение в тестовой программе мы решаем методом Рунге-Кутты четвертого порядка с начальными условиями $t(0) = 0$. В результате решения мы получили функциональную зависимость $t = t(s)$. Если скорость движения цели по поверхности постоянна и равна по модулю V_T , то можно перейти к параметру времени: $s = V_T \cdot T$.

Шаг цели в нашей итерационной модели будет таким:

$$Target_i = Target_{i-1} + \frac{dTarget(s)}{ds} \cdot V_T \cdot \Delta T.$$

Ход решения данного итерационного процесса определяется начальным положением точек преследователя и цели. Рассмотрим начальное положение точек преследователя и цели, $Pers_0$ и $Target_0$ (Рисунок 3.10). Их проекции на плоскость (XY) будут $Pers_{XY_0}$ и $Target_{XY_0}$.

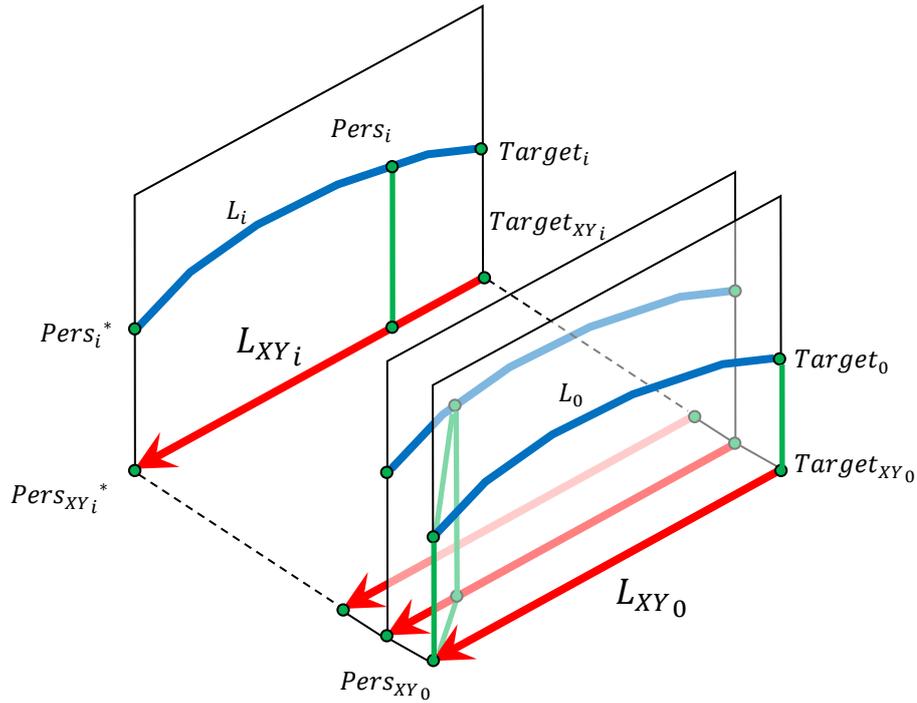


Рисунок 3.10 Множество проецирующих плоскостей

На плоскости (XY) сформируем вектор $\tau = Pers_{XY_0} - Target_{XY_0}$. Где $Pers_{XY_0}$ и $Target_{XY_0}$ горизонтальные проекции точек $Pers_0$ и $Target_0$ начального положения. Если координаты точки $Target_i$ известны, то известна и ее горизонтальная проекция $Target_{XY_i}$. От каждой проекции $Target_{XY_i}$ отложим вектор τ для получения точки $Pers_{XY_i}^*$. Далее, на плоскости (XY) формируется параметрическая прямая $L_{XY_i}(\gamma) = (1 - \gamma) \cdot Target_{XY_i} + \gamma \cdot Pers_{XY_i}^*$. Прямую $L_{XY_i}(\gamma)$ на плоскости (XY) можно разложить по координатам:

$$L_{XY_i}(\gamma) = \begin{bmatrix} L_{X_i}(\gamma) \\ L_{Y_i}(\gamma) \end{bmatrix}.$$

Откуда мы получим параметрическое уравнение линии

$$L_i(\gamma) = \begin{bmatrix} L_{X_i}(\gamma) \\ L_{Y_i}(\gamma) \\ f(L_{X_i}(\gamma), L_{Y_i}(\gamma)) \end{bmatrix}$$

на поверхности $z = f(x, y)$.

Чтобы получить координаты следующего шага итерации $Pers_i$, необходимо в ранее вычисленной точке $Pers_{i-1}$ построить сферу с радиусом $V_p \cdot \Delta T$. Где V_p модуль скорости, ΔT — период дискретизации по времени.

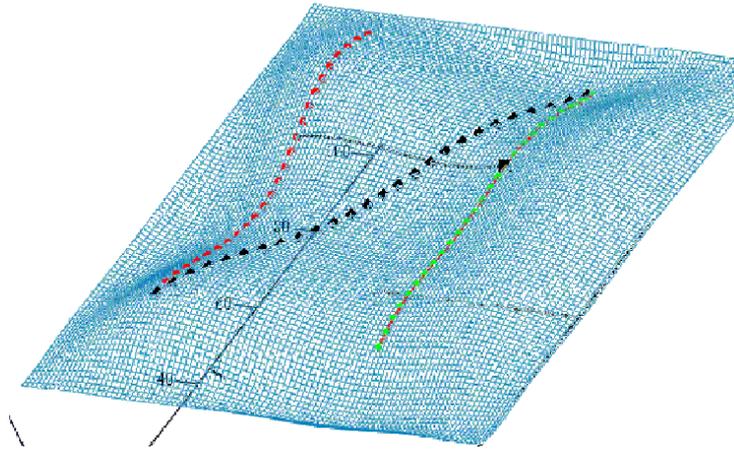


Рисунок 3.11 Проекция прямой линии на поверхность

Для решения уравнения $|L_i(\gamma) - Pers_{i-1}| = V_p \cdot \Delta T$ относительно параметра γ используются встроенные средства систем компьютерной математики. В нашей тестовой программе для решения использовался метод Мюллера. Найденное значение γ подставляем в уравнение линии $L_i(\gamma)$, $Pers_i = L_i(\gamma)$. Это значение и будет искомой точкой следующего шага нашего итерационного процесса.

По материалам главы была написана программа, которая последовательно рассчитывает точки траектории движения преследователя (Рисунок 3.11). На рисунке 3.11 показаны множество точек траектории цели $\{Target_i\}$, множество точек $\{Pers_i^*\}$ и одна из линий, соединяющих точки $\{Target_i\}$ и $\{Pers_i^*\}$.

Рисунок 3.11 дополнен ссылкой на анимированное изображение [73].

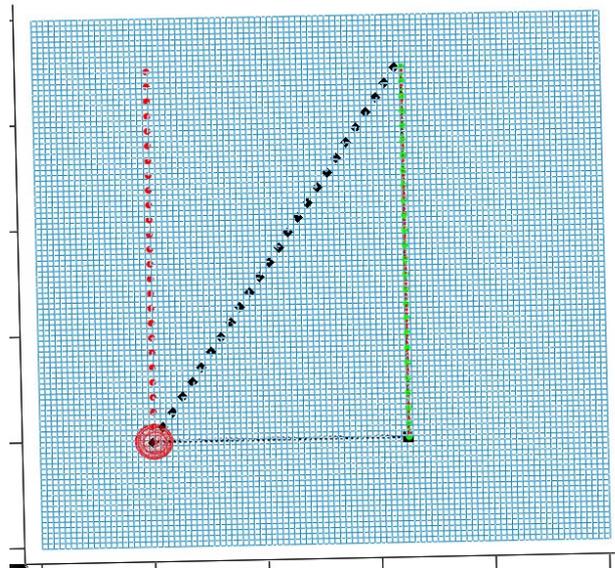


Рисунок 3.12 Сфера на поверхности

Каждая из точек траектории преследователя есть продукт пересечения сферы радиуса $V_p \cdot \Delta T$ с центром в месте предыдущего положения преследователя. На рисунке 3.12 изображена одна сфера. Из рисунка видно, сфера проходит через точку следующего шага траектории. Рисунок 3.12 дополнен ссылкой на анимированное изображение [74].

3.1.2. Модель стремления к плоскости движения цели при параллельном сближении

Метод параллельного сближения в задачах преследования на плоскости и пространстве имеет множество практических реализаций. Цель и преследователь могут находиться на разных поверхностях. Поверхность преследователя может являться эквидистантой к поверхности цели или близкой к этому.

В данной главе рассматривается реализация в системе компьютерной математики метода параллельного сближения в пространстве. В данном методе вектор скорости преследователя направлен произвольно. Траектория преследователя постепенно приближается к движению в плоскости, образованной линией, соединяющей начальные положения преследователя и цели, и векто-

ром скорости. В данной задаче цель движется равномерно и прямолинейно. Движение преследователя является равномерным. Точки траектории преследователя рассчитываются последовательно, являясь результатом пересечения плоскости, содержащей линию визирования, сферы и конуса. По мере приближения к плоскости движения цели алгоритм вычисления точек траектории изменяется. Теперь точка траектории преследователя является результатом пересечения сферы, плоскости движения цели и плоскости, содержащую линию визирования.

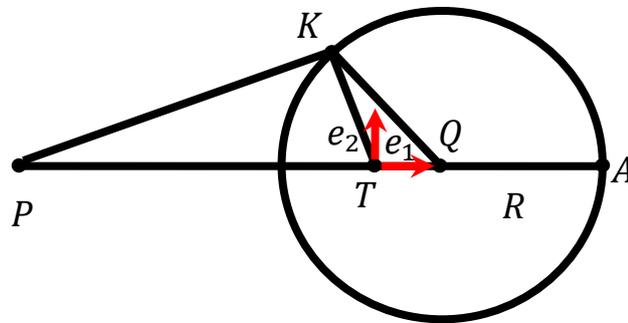


Рисунок 3.13 Характеристические точки окружности Аполлония

Согласно методу параллельного сближения на плоскости и в пространстве направления движения преследователя и цели пересекаются в точке K окружности Аполлония (Рисунок 3.13).

Пусть преследователь находится в точке P , цель в точке T , в некоторый момент времени t (Рисунок 3.13). По определению, окружностью Аполлония называется множество точек $\{K\}$, для которых характерно то, что отношение расстояний до двух фиксированных точек является постоянным:

$$\frac{|PK|}{|TK|} = \frac{|V_P|}{|V_T|} = const,$$

где V_P — это модуль скорости равномерного движения преследователя, V_T — модуль скорости равномерного движения цели. Если направление движе-

ния цели является фиксированным, то на окружности Аполлония существует единственная точка K и единственное направление скорости V_P преследователя.

Вектор скорости преследователя V_P и вектор скорости цели V_T в методе параллельного сближения определяют плоскость, в которой происходит преследование. Тогда имеет место быть следующая итерационная схема (Рисунок 3.14):

$$P_{i+1} = P_i + |V_P| \cdot \frac{P_i K_i}{|P_i K_i|} \cdot \Delta T,$$

где ΔT — это интервал времени, на которые разбито время дискретного процесса преследования.

Если вектор скорости цели T есть V_T , то положение следующего шага цели T_{i+1} будет таким:

$$T_{i+1} = T_i + V_T \cdot \Delta T.$$

Координаты точки K_i находятся из решения системы уравнений относительно параметра t :

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + V_T \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{|T_{i+1} - T_i|} \cdot t. \end{cases}$$

Центр окружности Аполлония Q_i и ее радиус R_i и рассчитываются так:

$$R_i = \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot |T_i - P_i|, Q_i = T_i + \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot (T_i - P_i).$$

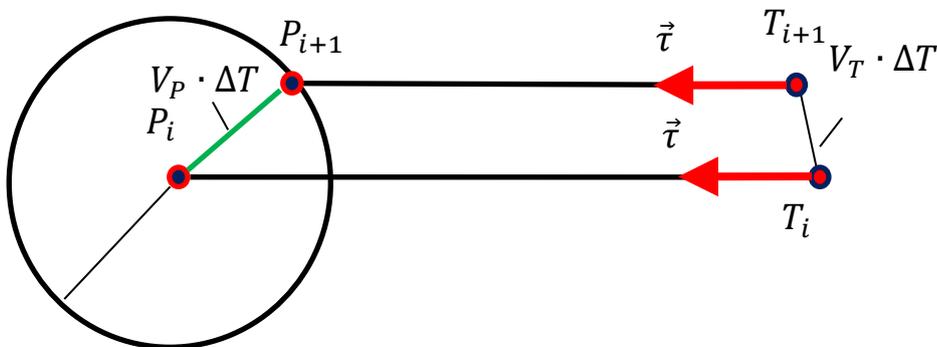


Рисунок 3.14 Расчет следующего шага преследователя

Следующий шаг траектории преследователя P_{i+1} в методе параллельного сближения удовлетворяет решению системы уравнений (3.1), относительно параметра h :

$$\begin{cases} (P_{i+1} - P_i)^2 = (V_P \cdot \Delta T)^2 \\ P_{i+1} = T_{i+1} + h \cdot \frac{P_i - T_i}{|P_i - T_i|} \end{cases} \quad (3.1)$$

Целью данной главы является расчет траектории преследователя в пространстве, когда начальные векторы скоростей преследователя и цели направлены произвольно (Рисунок 2.12.3), кроме того векторы V_P и V_T , приложенные к точкам P и T , соответственно, не лежат в одной плоскости.

В тестовой программе, написанной по материалам главы, цель движется прямолинейно и равномерно.

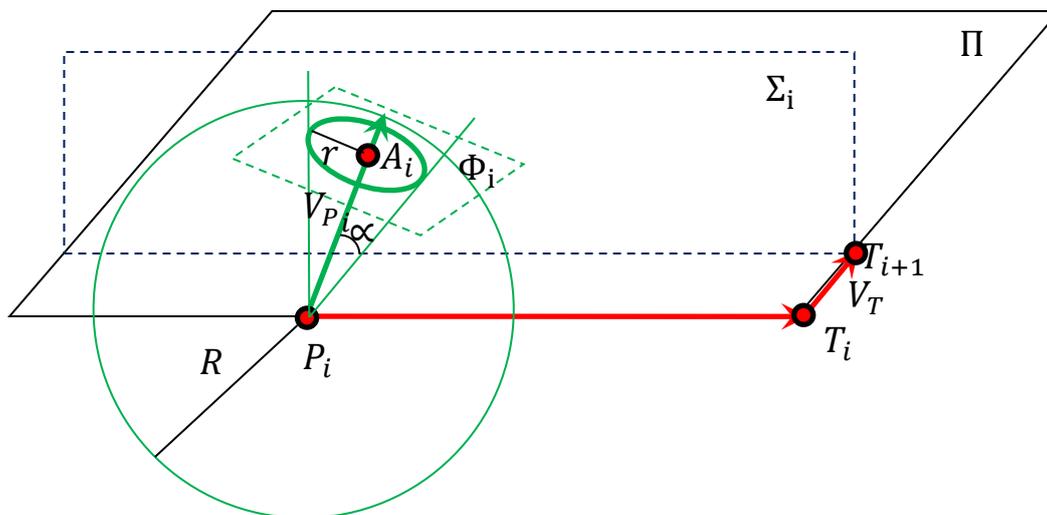


Рисунок 3.15 Расчет траектории в пространстве

Плоскость Π , образованную линией, соединяющей преследователя и цель (Рисунок 3.15), в момент начала преследования и вектором скорости V_T , будем считать координатной плоскостью XU с началом в точке P , осью абсцисс направленной вдоль прямой (PT) .

Необходимо в итерационном процессе добиться того, чтобы координаты точки преследователя постепенно расположились в координатной плоскости XU , (плоскость Π).

Плоскость Σ_i перпендикулярна плоскости Π , параллельна прямой линии (PT) и содержит точку T_{i+1} .

Траектория преследователя должна удовлетворять ограничениям на кривизну. Радиус кривизны траектории не может быть меньше некоторого порогового значения.

Шаг преследователя может принадлежать конусу с углом раствора, рассчитанным из ограничений по кривизне, и осью вдоль текущего вектора скорости с вершиной в точке положения преследователя.

Точка следующего положения преследователя будет являться точкой пересечения плоскости Π , плоскости Σ_i и указанного конуса.

В модификации кинематической модели параллельного сближения в пространстве, расчет траектории преследователя рассчитывается для двух положений в пространстве. В первом случае сегмент траектории преследователя расположен в пространстве. Во втором случае сегмент траектории преследователя принадлежит плоскости, задача превращается в преследование на плоскости. Отдельно рассчитывается плавный переход из пространства на плоскость.

Модель преследования является дискретной, поэтому вводится промежуток времени ΔT , за который участники итерационного процесса совершают шаг. Преследователь, который находится в точке P_i (Рисунок 3.15), имеет возможность совершить шаг в пределах сферы радиуса $V_p \cdot \Delta T$ с центром в точке P_i . V_p — модуль скорости равномерного движения преследователя. Это возможность ограничена правильным конусом с углом раствора α и вершиной в точке P_i , ось конуса направлена вдоль вектора скорости преследователя. Характеристики конуса следуют из ограничений по кривизне траектории преследователя.

Угол при конической поверхности (Рисунок 3.15) равен $\alpha = \omega \cdot \Delta T$, ω — максимальная частота углового вращения преследователя равная $\omega = V_P / R_{min}$, где R_{min} - минимальный радиус кривизны траектории преследователя.

Следующая точка P_{i+1} положения преследователя принадлежит плоскости Σ_i . При переходе на плоскость Π (Рисунок 3.15), модель преследования преобразуется в итерационную схему, представленную на рисунке 3.14.

Ось конуса сонаправлена с текущим вектором скорости V_{P_i} преследователя, выходящего из точки P_i . На этапе при расчете сегмента траектории в пространстве решается задача расчета точки, принадлежащей трем поверхностям: сфере, конусу и плоскости.

Модель задачи преследования позволяет произвести замену правильного конуса плоскостью Φ_i (Рисунок 3.15). Линия пересечения правильного конуса и сферы образует окружность и принадлежит плоскости Φ_i (Рисунок 3.15).

Параметры плоскости Φ_i будут следующими: $a_i = V_{P_i} / V_P$ — единичный вектор нормали плоскости Φ_i , V_{P_i} — вектор скорости для текущего положения преследователя P_i , V_P — модуль скорости равномерного движения преследователя, $A_i = P_i + a_i \cdot R \cdot \cos(\alpha)$, где R — радиус сферы, равный шагу преследователя $V_P \cdot \Delta T$ (Рисунок 3.15).

Расчет точки пересечения сферы, конуса и плоскости равноценен расчету точки пересечения плоскостей Φ_i и Σ_i со сферой радиуса R с центром в точке P_i .

Плоскость Σ_i проходит через точку T_{i+1} , нормалью является вектор b_i (Рисунок 3.15):

$$b_i = \left[(P - T) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right],$$

где P и T — начальные положения преследователя и цели.

В тестовой программе определяется прямая линия (3.2), являющаяся пересечением плоскостей Φ_i и Σ_i :

$$L_i(t) = K_i + h \cdot \frac{[a_i \times b_i]}{|[a_i \times b_i]|} \quad (3.2)$$

где K_i — точка пересечения плоскостей Φ_i , Σ_i и Π (Рисунок 3).

Координаты точки P_{i+1} из первого уравнения системы (3.3) подставляются во второе уравнение системы (3):

$$\begin{cases} P_{i+1} = K_i + h \cdot \frac{[a_i \times b_i]}{|[a_i \times b_i]|} \\ (P_{i+1} - P_i)^2 = (V_p \cdot \Delta T)^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Система уравнений (3.3) решается относительно параметра h . Значение h подставляется в первое уравнение системы (3.3). Так определяется следующая точка P_{i+1} траектории преследователя.

Итерационный процесс расчета траектории движения преследователя в пространстве является полностью сформированным.

Если в случае перехода процесса преследования на плоскость, задача преследования приобретает вид как на рисунке 3.13, то здесь скорость преследователя всегда направлена в точку на окружности Аполлония (на рисунке 3.13 это точка K). Тогда используется итерационная схема, представленная системой уравнений (3.1).

В случае, когда скорость не направлена на точку на окружности Аполлония, то в модели применяется следующая итерационная схема (Рисунок 3.16).

Вместо однопараметрического множества параллельных линий, соединяющих преследователя и цель $(P_i T_i)$ предложено множество составных параллельных линий $\{L_i(t)\}$, которое формируется следующим образом: $L_{i+1}(t) = L_i(t) + (T_{i+1} - T_i)$. Следующий шаг преследователя P_{i+1} есть точка пересечения окружности радиуса $V_p \cdot \Delta T$ с центром в точке P_i с линией $L_{i+1}(t)$ (Рисунок 3.16).

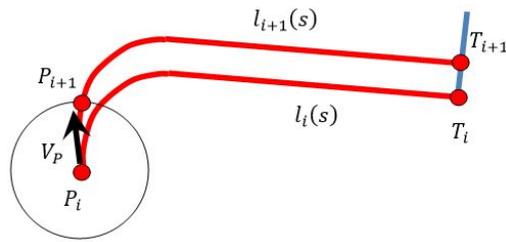


Рисунок 3.16 Расчет следующего шага преследователя

Первая линия однопараметрического множества линий $\{L_i(t)\}$ формируется из окружности минимального радиуса R_{min} и касательной прямой линии, проходящей через точку T (Рисунок 3.17).

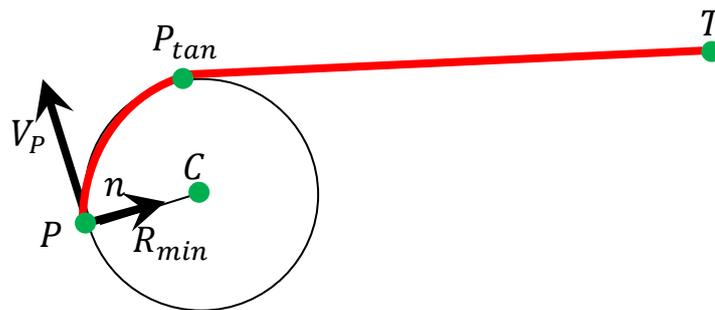


Рисунок 3.17 Расположение преследователя, цели и окружности

Центр указанной окружности находится в точке $C = P + R_{min} \cdot n$, где P — это начальное положение преследователя, R_{min} — минимальный радиус кривизны траектории преследователя, n — единичный вектор, перпендикулярный вектору скорости преследователя V_P . Линия состоит из дуги $\overline{PP_{tan}}$ и отрезка $[P_{tan}T]$, где T — это начальное положение цели, а P_{tan} — точка касания с окружностью.

На рисунке 3.18 показаны результаты расчета точек траектории преследователя в пространстве без учета перехода преследования на плоскость Π .

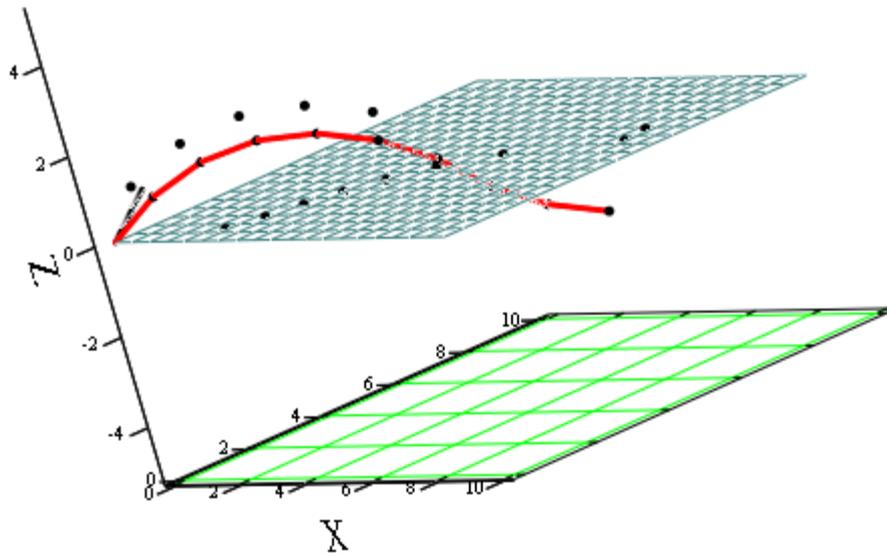


Рисунок 3.18 Расчет траектории преследователя в пространстве без перехода на плоскость

На экран выведены точки K_i пересечения плоскости Π (плоскость, к которой стремится процесс преследования), плоскости Σ и плоскости Φ (Рисунок 3.15) и точки пересечения конуса, сферы и плоскости Σ .

В итерационном процессе производится анализ взаимного расположения точек положения преследователя P_i и плоскости Π движения цели.

Поскольку плоскость Π движения цели совпадает с координатной плоскостью XY (произведен перенос системы координат), то достаточно произвести анализ аппликаты преследователя на знак. При изменении знака аппликаты, то происходит возврат на предыдущую рассчитанную точку траектории и производится расчет по другой итерационной схеме.

Допустим, что аппликата точки P_{i-1} имеет положительное значение, а аппликата точки P_i^* имеет отрицательное значение. Координаты точки P_i^* (Рисунок 3.19) получены в результате пересечения сферы $S_i(P_i, V_P \cdot \Delta T)$, конуса с осью вращения вдоль вектора $V_{P_{i-1}}$ с углом раствора $\alpha = \omega \cdot \Delta T$ (Рисунок 3.15), и плоскости параллельного движения Σ_i .

Происходит возврат алгоритма в точку P_{i-1} и ищется P_i как точка пересечения сферы $S_{i-1}(P_{i-1}, V_P \cdot \Delta T)$ с плоскостью параллельного движения Σ_i и плоскостью Π движения цели.

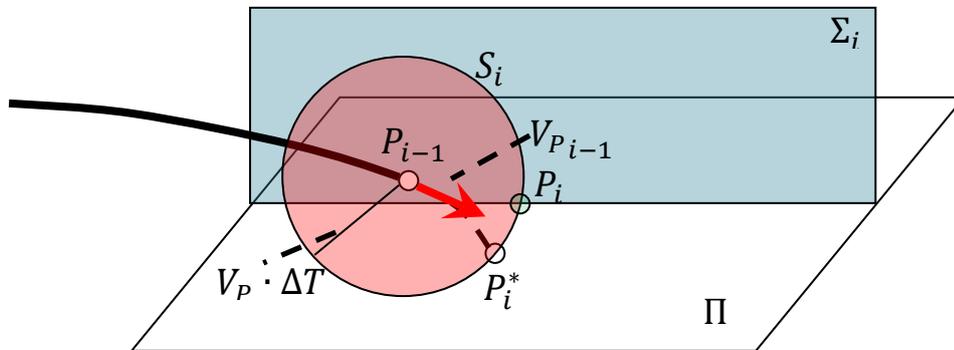


Рисунок 3.19 — Пересечение сферы, плоскости движения цели и плоскости параллельного сближения

Результаты работы программы расчета траектории преследователя, преследующего цель, двигающуюся равномерно и прямолинейно, показаны на рисунке 3.20. Траектория переходит из пространства на плоскость.

Рисунок 3.20 дополнен ссылкой на анимированное изображение [75], где возможно посмотреть на процесс преследования.

В предложенной модели расчета траектории преследователя плоскость Π движения цели определена начальной линией, это линия, соединяющая преследователя и цель (PT) и вектором скорости V_T движения цели.

Плоскость Π в этом случае служит поверхностью, опускаться ниже которой не допускается. В программе реализована такая модель преследования: переход от преследования в пространстве к преследованию на плоскости без захода за плоскость ограничения и с ограничениями по кривизне траектории движения преследователя.

В данной главе рассмотрена модель построения траекторий преследователя в пространстве.

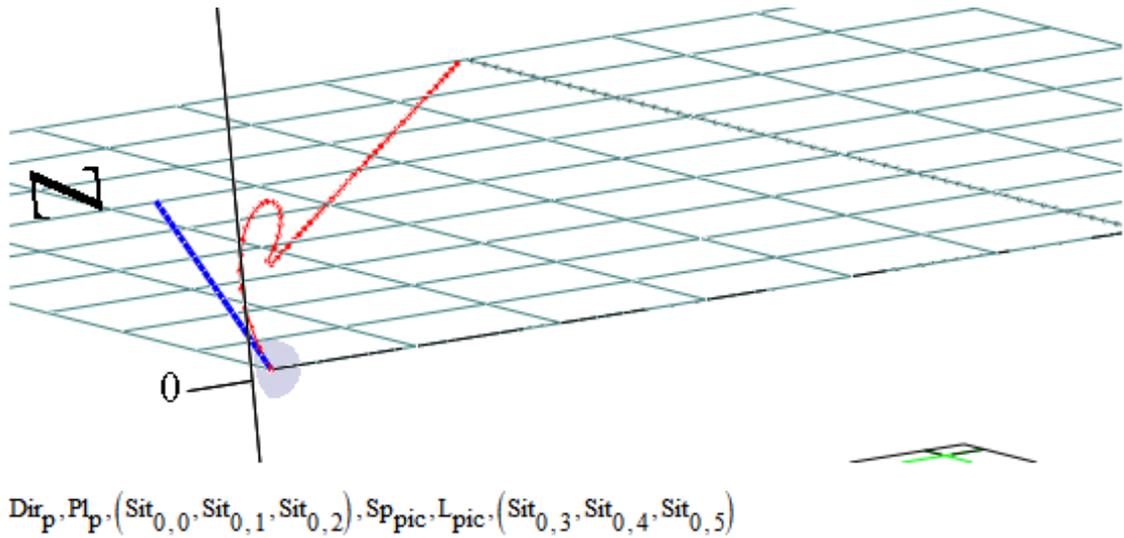


Рисунок 3.20 Расчет траектории преследователя

3.2. Модифицированная модель преследования объектов методом погони

Задачу преследования на плоскости, в пространстве и на поверхности можно представить в виде численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Допустим, решение системы уравнений (3.4) дает координаты траектории преследователя $P(t) = \begin{bmatrix} P_x(t) \\ P_y(t) \end{bmatrix}$ на плоскости.

$$\begin{aligned} \frac{dP_x(t)}{dt} &= \frac{P_x(t) - T_x(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2}} \cdot V_P \\ \frac{dP_y(t)}{dt} &= \frac{P_y(t) - T_y(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2}} \cdot V_P \end{aligned} \quad (3.4)$$

Точки траектории преследователя $P(t)$ зависят от положения цели $T(t)$ и от модуля скорости движения преследователя V_P . Начальное направление движения не задается, но предполагается, что скорость движения преследователя всегда направлена на цель. Также предполагается, что траектория цели $T(t)$ является заранее известной.

$$\begin{aligned}
\frac{dP_x(t)}{dt} &= \frac{P_x(t) - T_x(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2}} \cdot V_P \\
\frac{dP_y(t)}{dt} &= \frac{P_y(t) - T_y(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2}} \cdot V_P \\
\frac{dT_x(t)}{dt} &= -\frac{P_y(t) - T_y(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2}} \cdot V_T \\
\frac{dT_y(t)}{dt} &= -\frac{P_x(t) - T_x(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2}} \cdot V_T
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Решение системы (3.5) (V_T – модуль скорости цели) приводит к движению вдоль прямой линии, соединяющей начальные положения преследователя и цели.

Система уравнений (3.6) дает решение для траектории преследователя в трехмерном пространстве.

$$\begin{aligned}
\frac{dP_x(t)}{dt} &= \frac{P_x(t) - T_x(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2 + (P_z(t) - T_z(t))^2}} \cdot V_P \\
\frac{dP_y(t)}{dt} &= \frac{P_y(t) - T_y(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2 + (P_z(t) - T_z(t))^2}} \cdot V_P \\
\frac{dP_z(t)}{dt} &= \frac{P_z(t) - T_z(t)}{\sqrt{(P_x(t) - T_x(t))^2 + (P_y(t) - T_y(t))^2 + (P_z(t) - T_z(t))^2}} \cdot V_P
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Рассмотрим случай, когда преследователь $P(t)$ и цель $T(t)$ движутся по некоторой поверхности $z = f(x, y)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dP_x}{dt} \cdot (T_y - P_y) &= \frac{dP_y}{dt} \cdot (T_x - P_x) \\
\left(\frac{dP_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dP_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dP_z}{dt}\right)^2 &= (V_P)^2 \cdot \\
P_z &= f(P_x, P_y)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Первое уравнение системы (3.7) говорит о том, что горизонтальная проекция вектора движения преследователя $P(t)$ направлена на горизонтальную проекцию вектора цели $T(t)$.

Второе уравнение системы (3.7) говорит о постоянной по модулю скорости преследователя.

Третье уравнение системы (3.7) говорит о том, что все точки траектории движения преследователя принадлежат поверхности $z = f(x, y)$.

Продифференцировав третье уравнение системы (3.7), перейдем к системе уравнений (3.8).

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} \cdot (T_y - P_y) &= \frac{dP_y}{dt} \cdot (T_x - P_x) \\ \left(\frac{dP_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dP_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dP_z}{dt}\right)^2 &= (V_P)^2. \\ \frac{dP_z}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial P_x} \cdot \frac{dP_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P_y} \cdot \frac{dP_y}{dt} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Система уравнений (3.8) имеет решение относительно переменных:

$$\left\{ \frac{dP_x}{dt}, \frac{dP_y}{dt}, \frac{dP_z}{dt} \right\}.$$

В системе дифференциальных уравнений (3.9) представлено это решение.

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= \frac{V_P \cdot (T_x - P_x)}{\sqrt{(T_x - P_x)^2 + (T_y - P_y)^2 + \left((T_x - P_x) \cdot \frac{\partial f}{\partial P_x} + (T_y - P_y) \cdot \frac{\partial f}{\partial P_y} \right)^2}} \\ \frac{dP_y}{dt} &= \frac{V_P \cdot (T_y - P_y)}{\sqrt{(T_x - P_x)^2 + (T_y - P_y)^2 + \left((T_x - P_x) \cdot \frac{\partial f}{\partial P_x} + (T_y - P_y) \cdot \frac{\partial f}{\partial P_y} \right)^2}} \\ \frac{dP_z}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial P_x} \cdot \frac{dP_x}{dt} + \frac{\partial f}{\partial P_y} \cdot \frac{dP_y}{dt} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Рассмотрим такую квазидискретную модель метода погони на плоскости, когда вектор скорости преследователя P постоянно направлен на цель T (Рисунок 3.21).

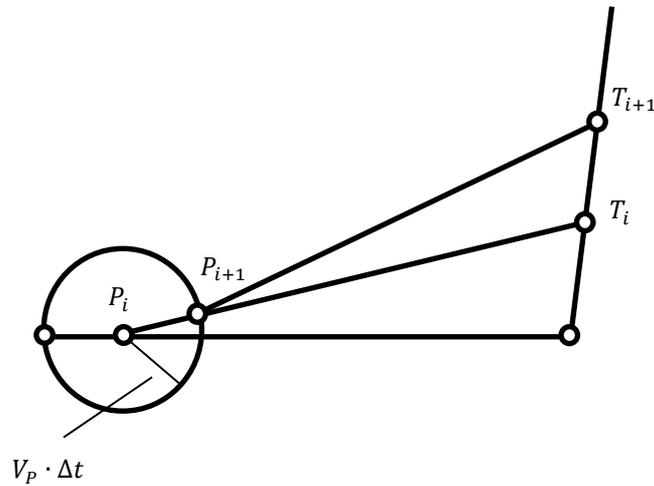


Рисунок 3.21 Скорость преследователя всегда направлена на цель

На рисунке 3.21 представлен итерационный процесс метода погони на плоскости. В момент времени t_i считаются известными координаты преследователя P_i , координаты цели T_i . Через временной промежуток Δt следующий шаг преследователя P_{i+1} рассчитывается по формуле:

$$P_{i+1} = P_i + V_p \cdot \Delta t \cdot (T_i - P_i).$$

Координаты следующего шага преследователя P_{i+1} есть точка пересечения линии визирования $[P_i T_i]$ в момент времени t_i с окружностью радиуса $V_p \cdot \Delta t$ с центром в точке P_i . V_p — это модуль скорости преследователя.

На рисунке 3.22 показан результат моделирования задачи преследования методом погони, согласно итерационной схеме, с нахождением точки пересечения окружности $(P_i, V_p \cdot \Delta t)$ и прямой $(P_i T_i)$, в системе компьютерной математики.

Такой подход к проектированию траектории не позволяет моделировать, когда скорость преследователя в момент начала преследования направлена не на цель.

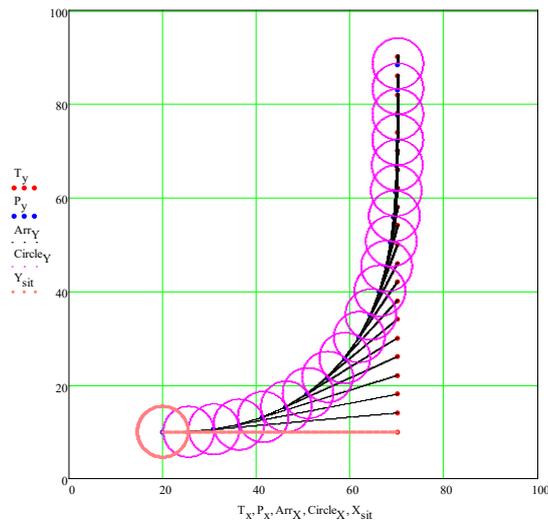


Рисунок 3.22 Результат моделирования траектории преследователя методом погони

Рассмотрим следующую итерационную схему. Будем считать, что в момент времени t_i являются известными положение цели T_i , положение преследователя P_i и векторное уравнение $F_i(s)$ прогнозируемой на данный момент времени траектории движения преследователя (Рисунок 3.23).

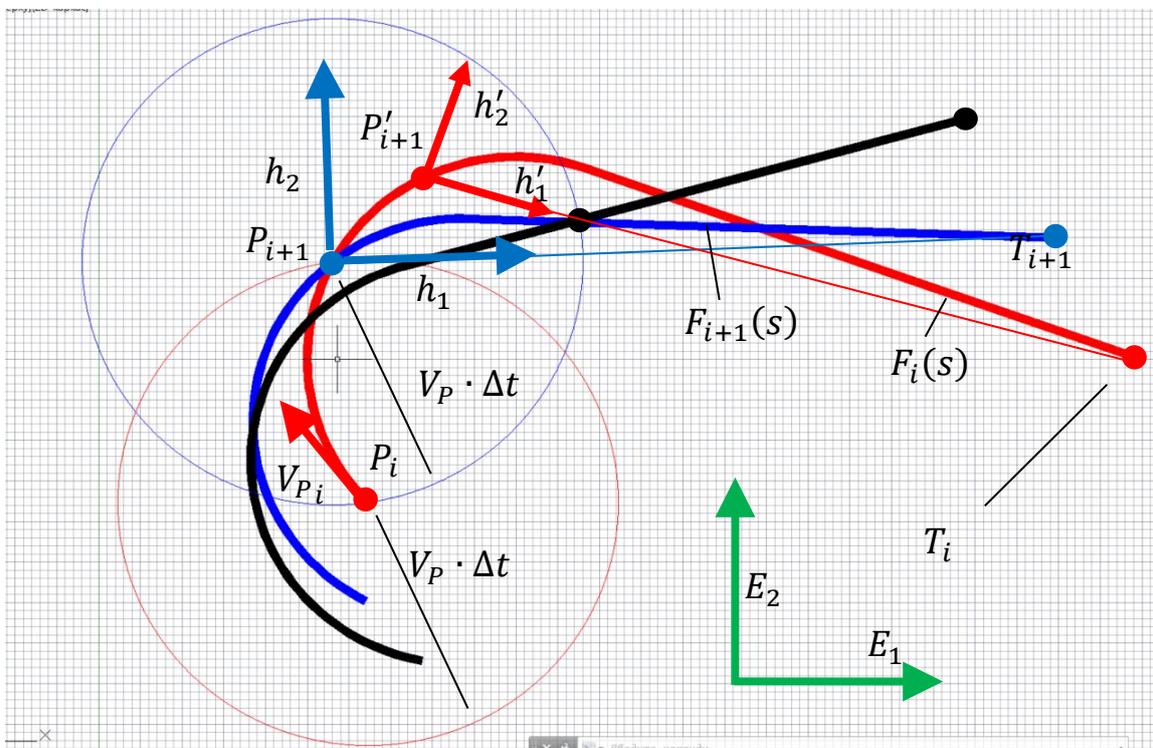


Рисунок 3.23 Моделирование траектории преследователя

В таком итерационном процессе нашей задачей является рассчитать координаты P_{i+1} следующего шага преследователя и выполнить аффинные преобразования векторной функции $F_i(s)$ для того, чтобы найти выражения для функции $F_{i+1}(s)$.

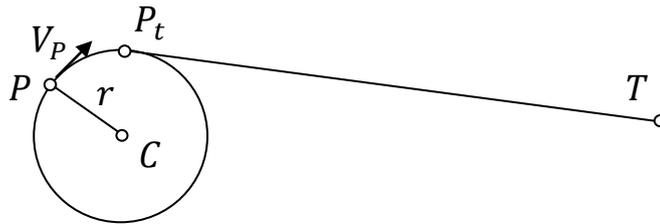


Рисунок 3.26 Моделирование траектории преследователя

Чтобы найти координаты точки P_{i+1} , необходимо решить уравнение $|F_i(s_{i+1}) - F_i(s_i)| = V_P \cdot \Delta t$ относительно параметра s_{i+1} .

При разработке модели итерационного процесса, были заданы начальные координаты T и P , начальный вектор скорости движения преследователя V_P . Также определена векторная функция $F(s)$ в момент начала преследования.

На рисунке 3.26 это составная кривая из дуги $\overline{PP_t}$ и прямолинейного сегмента $[P_tT]$, где параметром служит длина дуги этой кривой.

На i – том итерационном шаге происходит следующее:

1. Строится окружность с центром в точке P_i радиуса $V_P \cdot \Delta t$. Точка пересечения этой окружности и траектории $F_i(s)$ будет точкой следующего шага преследователя P_{i+1} .
2. Потом находим точку пересечения P'_{i+1} параметрической векторной функции $F_i(s)$ с окружностью с центром в точке T_i и радиуса $|T_{i+1} - P_{i+1}|$.
3. Затем, формируем локальный базис (h'_1, h'_2) центром координат в точке P'_{i+1} и пересчитываем функцию $F_i(s)$. В базисе (h'_1, h'_2) она будет выглядеть так $F'_i(s)$. Компоненты базиса (h'_1, h'_2) такие:

$$h'_1 = \frac{T_i - P'_{i+1}}{|T_i - P'_{i+1}|}$$

$$h'_2 = \begin{bmatrix} -h'_{1y} \\ h'_{1x} \end{bmatrix}.$$

Вид функции $F'_i(s)$ будет таким:

$$F'_i(s) = \begin{bmatrix} (F_i(s) - P'_{i+1}) \cdot h'_1 \\ (F_i(s) - P'_{i+1}) \cdot h'_2 \end{bmatrix}.$$

4. Сформируем базис (h_1, h_2) с центром координат в точке P_{i+1} . Компоненты базиса (h_1, h_2) будут выглядеть так:

$$h_1 = \frac{T_{i+1} - P_{i+1}}{|T_{i+1} - P_{i+1}|}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} -h_{1y} \\ h_{1x} \end{bmatrix}.$$

Отметим очень важный момент, что $|T_{i+1} - P_{i+1}| = |T_i - P'_{i+1}|$. Отсюда, мы можем утверждать, что локальное представление в локальном базисе (h_1, h_2) с центром в точке P_{i+1} кривой $F_{i+1}(s)$ будет совпадать с локальным представлением базиса (h'_1, h'_2) $F'_{i+1}(s) = F'_i(s)$.

5. Базис мировой системы координат (E_1, E_2) в базисе (h_1, h_2) выглядит так:

$$e_1 = \begin{bmatrix} E_1 \cdot h_1 \\ E_1 \cdot h_2 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \begin{bmatrix} E_2 \cdot h_1 \\ E_2 \cdot h_2 \end{bmatrix}$$

Следовательно, уравнение линии $F_{i+1}(s)$ будет выражаться следующим образом:

$$F_{i+1}(s) = \begin{bmatrix} F'_{i+1}(s) \cdot e_1 \\ F'_{i+1}(s) \cdot e_2 \end{bmatrix} + P_{i+1}.$$

Итого на i – *том* шаге итерации мы имеем следующее: шаг T_{i+1} выбирается целью, шаг преследователя P_{i+1} рассчитывается как точка пересечения окружности $(P_i, V_P \cdot \Delta t)$ и ранее рассчитанной векторной параметрической ли-

нии $F_i(s)$, на основе уже имеющихся данных рассчитывается новая прогнозируемая траектория преследователя $F_i(s)$.

На основе вышеизложенного материала была написана тестовая программа, которая на простом примере показывает, как можно подвести к методу погони, когда в момент начала преследования вектор скорости преследователя направлен не на цель.

Траектория преследователя при этом имеет ограничения на кривизну. Радиус кривизны траектории не может быть меньше некоторого порогового значения.

Рисунок 3.27 как раз демонстрирует результаты работы программы. Рисунок 3.27 дополнен ссылкой на анимированное изображение [76], где можно в динамике наблюдать процесс преследования цели, совершающей движение по predetermined траектории.

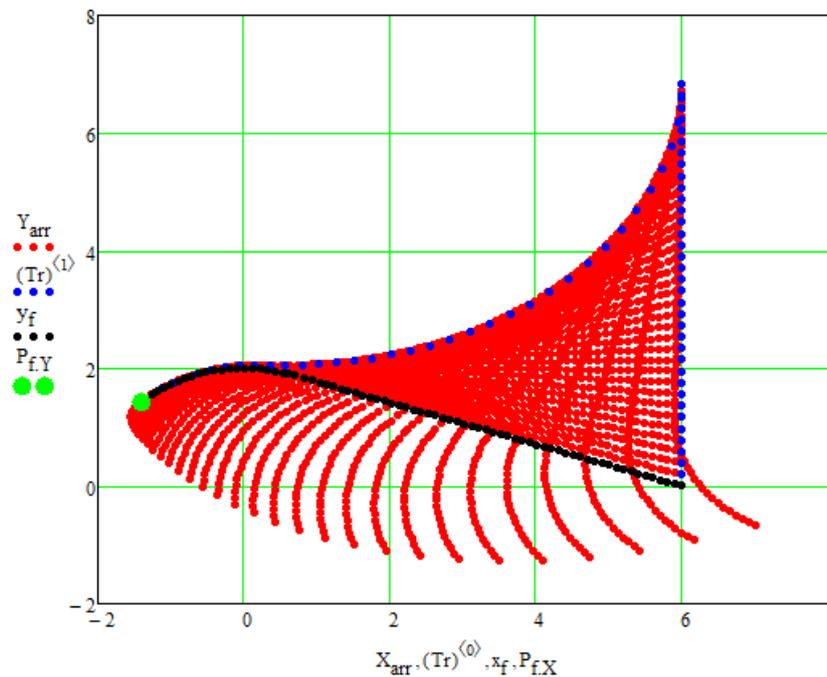


Рисунок 3.27 Кинематическая модель метода погони

Рассмотрим метод погони уже не с точки зрения следования прогнозируемым траекториям, а с точки зрения, когда происходит корректировка угла между реальным направлением движения и «желаемым направлением». В

данном параграфе за «желаемые направления» рассматриваются линии визирования $[P_i T_i]$, $[P_{i+1} T_{i+1}]$ и т.д. (Рисунок 2.18).

На рисунке 3.28 показано, что в момент времени t_i преследователь находится в точке P_i , а цель в точке T_i . Преследователь в данный момент времени имеет вектор скорости \vec{V}_{P_i}

В момент времени t_i преследователь стремится к тому, чтобы направление его движения стремилось принять направление $[P_i T_i]$. Но преследователь не может мгновенно изменить направление своего движения. Поэтому мы ввели в математическую модель минимальный радиус кривизны траектории R_{min} .

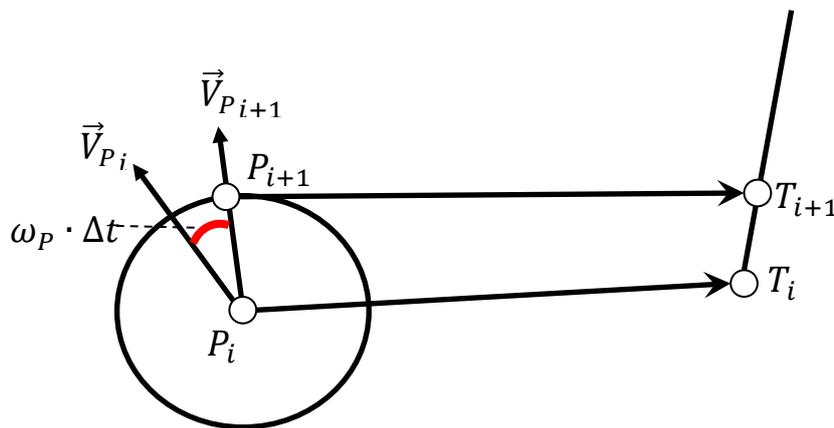


Рисунок 3.28 Корректировка угла направления движения

Если преследователь движется на плоскости с постоянной по модулю скоростью V_P , то через промежуток времени Δt вектор направления \vec{V}_{P_i} примет значение $\vec{V}_{P_{i+1}}$, совершив поворот на угол $\omega \cdot \Delta t$, где $\omega = V_P / R_{min}$. После совершения поворота преследователь переместится вдоль вектора $\vec{V}_{P_{i+1}}$ на расстояние $V_P \cdot \Delta t$ (Рисунок 3.28).

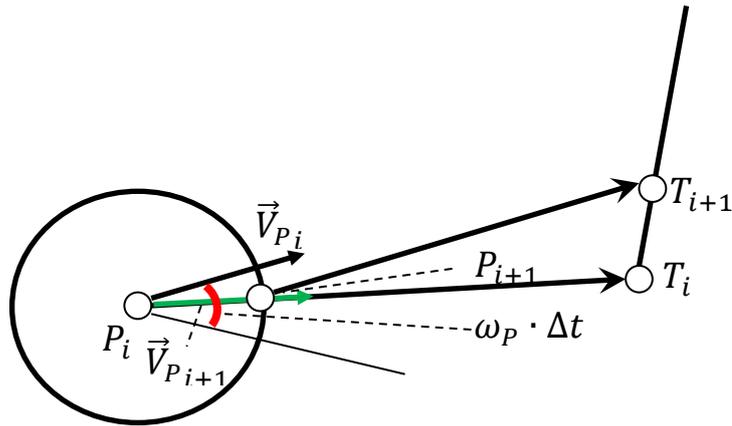


Рисунок 3.29 Корректировка угла направления

Если в какой-то момент времени t_i величина угла между предполагаемым направлением движения $[P_i T_i]$ и вектором скорости \vec{V}_{P_i} меньше, чем значение $\omega \cdot \Delta t$, то следующий шаг преследователя откладывается вдоль линии $[P_i T_i]$ (Рисунок 3.29)

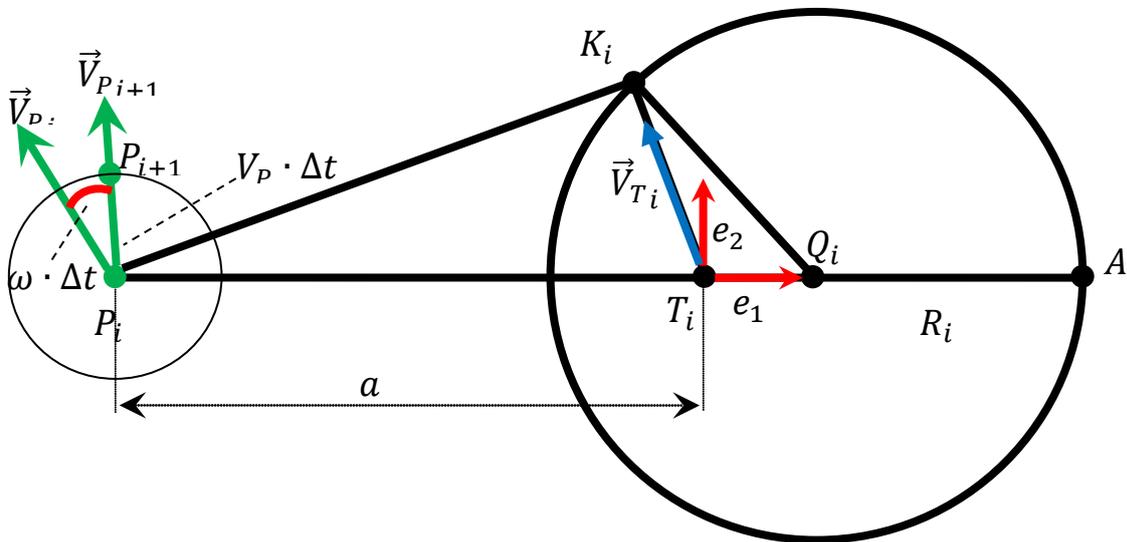


Рисунок 3.30 Корректировка направления при параллельном сближении

Рассмотрим случай, когда в момент t_i преследователь имеет координаты P_i и направление скорости \vec{V}_{P_i} (Рисунок 3.30). Цель в этот момент времени имеет координаты T_i и направление скорости \vec{V}_{T_i} .

Координаты точек P_i и T_i , координаты векторов \vec{V}_{P_i} и \vec{V}_{T_i} считаются заданными в системе координат (e_1, e_2) с центром в точке T_i .

В системе координат (e_1, e_2) с центром в точке T_i по данным P_i, T_i и \vec{V}_{T_i} строится окружность Аполлония радиуса R_i с центром в точке Q_i .

Радиус окружности Аполлония R_i вычисляется по формуле:

$$R_i = \frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot |T_i - P_i|.$$

Центр окружности Аполлония Q_i вычисляется по формуле:

$$Q_i = T_i + \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot (T_i - P_i).$$

Точка K_i удовлетворяет системе уравнений (3.10):

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + \vec{V}_{T_i} \cdot \tau \end{cases} \quad (3.10)$$

Нами была написана процедура, которая вычисляет координаты точки K_i в системе координат (e_1, e_2) с центром в точке T_i . Система уравнений (3.10) может быть преобразована квадратному уравнению относительно τ :

$$V_T^2 \cdot \tau^2 + 2 \cdot (\vec{V}_{T_i} \cdot P_i) \cdot \tau - \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot P_i^2 = 0 \quad (3.11)$$

Уравнение (2.2) приобретает такой вид в системе координат (e_1, e_2) с центром в точке T_i , где:

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если принято, как на рисунке 2.8: $|P_i T_i| = a$, то для значения радиуса R_i имеем следующее:

$$R_i = \frac{V_P \cdot V_T}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a.$$

Для центра Q_i окружности Аполлония имеем:

$$Q_i = \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot a.$$

Точка P_i в системе координат (e_1, e_2) с центром в точке T_i выглядит так:

$$P_i = \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Не забываем, что в уравнении (2.2) выражение $(\vec{V}_{T_i} \cdot P_i)$ имеет смысл скалярного произведения.

Вектор скорости \vec{V}_{T_i} определяет положение точки K_i на окружности Аполлония, что в свою очередь задает предполагаемое направление движения, к которому будет стремиться вектор скорости \vec{V}_{P_i} преследователя P_i (Рисунок 3.30).

3.2.1. Модель преследования методом погони на поверхности

Рассмотрим задачу преследования на пересеченной местности, когда преследователь и цель передвигаются на поверхности в трехмерном пространстве с постоянными по модулю скоростями.

Пусть поверхность, по которой перемещаются преследователь и цель, задана в явном виде $z = f(x, y)$. Координаты положений преследователя P и цели T на поверхности $z = f(x, y)$ известны:

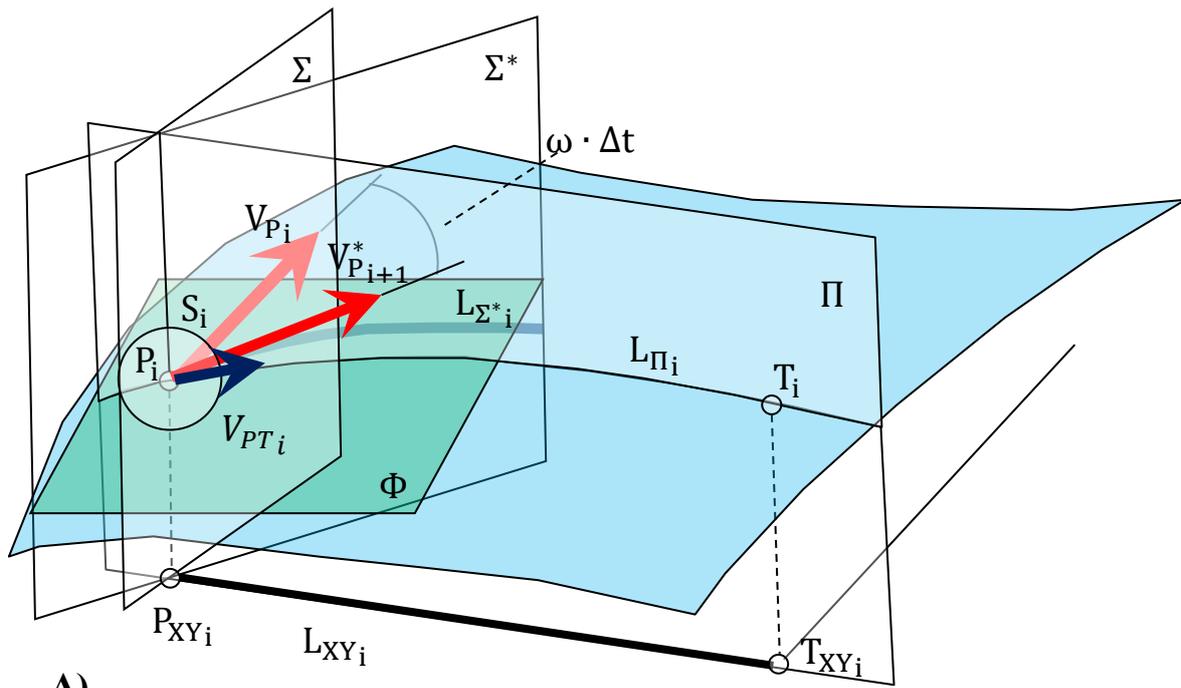
$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ f(P_x, P_y) \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ f(T_x, T_y) \end{bmatrix}.$$

Проекции положений преследователя P и цели T на плоскость (XY) :

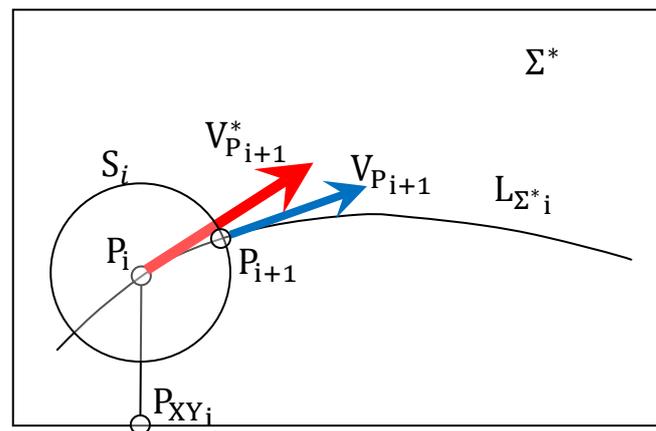
$$P_{XY} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ 0 \end{bmatrix}, T_{XY} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Через прямую линию, соединяющую проекции P_{XY_i} и T_{XY_i} , L_{XY_i} построим плоскость Π , ортогональную плоскости (XY) (Рисунок 2.21).

Преследователь в момент времени t_i имеет вектор скорости V_{P_i} . Через проецирующую прямую $(P_i P_{XY_i})$ и вектор V_{P_i} проведем проецирующую плоскость Σ .



А)



Б)

Рисунок 3.31 Построение траектории преследователя на поверхности

То, что преследователь стремится к цели, в нашей модели выражается в том, что плоскость Σ стремится принять положение плоскости Π .

На рисунке 3.31 А показано, что вектор V_{P_i} совершает поворот на угол $\omega \cdot \Delta t$ и принимает положение $V_{P_{i+1}}^*$. Вращение происходит в плоскости Φ , плоскость Φ — касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке P_i .

Вектор $V_{P_{i+1}}^*$ и прямая $(P_i P_{XY_i})$ определяют плоскость Σ^* . Построим сферу S_i с центром в точке P_i и радиусом $|V_{P_i}| \cdot \Delta t$.

Построим линию пересечения $L_{\Sigma^*_i}$ плоскости Σ^* и поверхности $z = f(x, y)$ (Рисунок 3.31 Б). Найдем точку P_{i+1} пересечения линии $L_{\Sigma^*_i}$ и сферы S_i .

Точка P_{i+1} в нашей модели построения траектории преследователя методом корректировки направления движения и является следующим шагом итераций.

Параметрическое уравнение линии L_{XY_i} , учитывая уравнения (3.10), будет таким:

$$L_{XY_i}(\tau) = (1 - \tau) \cdot \begin{bmatrix} P_{x_i} \\ P_{y_i} \\ 0 \end{bmatrix} + \tau \cdot \begin{bmatrix} T_{x_i} \\ T_{y_i} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Параметрическое уравнение линии $L_{\Pi_i}(\tau)$ будет таким:

$$L_{\Pi_i}(\tau) = \begin{bmatrix} (1 - \tau) \cdot P_{x_i} + \tau \cdot T_{x_i} \\ (1 - \tau) \cdot P_{y_i} + \tau \cdot T_{y_i} \\ f\left((1 - \tau) \cdot P_{x_i} + \tau \cdot T_{x_i}, (1 - \tau) \cdot P_{y_i} + \tau \cdot T_{y_i}\right) \end{bmatrix}$$

Найдем касательный вектор V_{PT} :

$$V_{PT_i} = \frac{d}{d\tau} L_{\Pi_i}(\tau) = \begin{bmatrix} -P_{x_i} + T_{x_i} \\ -P_{y_i} + T_{y_i} \\ (-P_{x_i} + T_{x_i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (-P_{y_i} + T_{y_i}) \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

В формуле (3.11) частные производные берутся в точке P_i (Рисунок 3.31).

На рисунке 3.31 касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ обозначена буквой Φ . Вектор скорости V_{P_i} и вектор V_{PT_i} принадлежат к плоскости Φ . Вектор $V_{P_{i+1}}$ получается вращением вектора V_{P_i} в плоскости Φ на угол $\omega \cdot \Delta t$ по направлению к вектору V_{PT_i} . Проецирующая прямая $(P_i P_{XY_i})$ и вектор $V_{P_{i+1}}$ образуют проецирующую плоскость Σ^* . Плоскость Σ^* пересекается с поверхностью $z = f(x, y)$ по линии $L_{\Sigma^*_i}$.

Если компоненты вектора $V_{P_{i+1}}$ можно представить так:

$$V_{P_{i+1}}^* = \begin{bmatrix} Vx_{P_{i+1}} \\ Vy_{P_{i+1}} \\ Vz_{P_{i+1}} \end{bmatrix}.$$

То проекцию прямой линии из точки P_i в направлении вектора $V_{P_{i+1}}$ на поверхность $z = f(x, y)$ от параметра времени t можно представить в виде:

$$L_{\Sigma^*_i}(t) = \begin{bmatrix} P_{x_i} + t \cdot Vx_{P_{i+1}} \\ P_{y_i} + t \cdot Vy_{P_{i+1}} \\ f(P_{x_i} + t \cdot Vx_{P_{i+1}}, P_{y_i} + t \cdot Vy_{P_{i+1}}) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Точка пересечения линии, заданной уравнением (3.12) со сферой S_i с центром в точке P_i радиуса $|V_{P_i}| \cdot \Delta t$ и будет следующим шагом в нашей модели построения траектории преследователя.

Теперь можно сказать, в момент времени t_{i+1} преследователь будет находиться в точке P_{i+1} и иметь скорость $V_{P_{i+1}}$, которую можно вычислить по формуле:

$$V_{P_{i+1}} = \frac{dL_{\Sigma^*_i}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} Vx_{P_{i+1}} \\ Vy_{P_{i+1}} \\ Vx_{P_{i+1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Vy_{P_{i+1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Отметим то, что вектор частных производных

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

берется в точке P_{i+1} .

Точка P_{i+1} есть результат решения уравнения (3.13) относительно параметра t :

$$(P_i - L_{\Sigma^*_i}(t))^2 = (V_{P_i} \cdot \Delta t)^2, \quad (3.13)$$

где Δt — это временной промежуток дискретизации нашего итерационного процесса.

Рассмотрим сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью Σ_T^* , показанное на рисунке 3.33. Плоскость Σ_T^* образована проецирующей прямой $(T_i T_{XY_i})$ и вектором $V_{T_{i+1}}$.

Плоскость Σ_T^* пересекает поверхность $z = f(x, y)$ по линии $L_{\Sigma_T^*}$ (Рисунок 3.33).

Можем представить вектор $V_{T_{i+1}}^*$ в виде:

$$V_{T_{i+1}}^* = \begin{bmatrix} Vx_{T_{i+1}} \\ Vy_{T_{i+1}} \\ Vz_{T_{i+1}} \end{bmatrix}.$$

Тогда линию пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью Σ_T^* можно представить в параметрическом виде (3.14):

$$L_{\Sigma_T^*}(t) = \begin{bmatrix} T_{x_i} + t \cdot Vx_{T_{i+1}} \\ T_{y_i} + t \cdot Vy_{T_{i+1}} \\ f(T_{x_i} + t \cdot Vx_{T_{i+1}}, T_{y_i} + t \cdot Vy_{T_{i+1}}) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Как и в предыдущем параграфе, построим сферу S_{T_i} с центром в точке T_i и радиусом $|V_{T_i}| \cdot \Delta t$. Найдем точку пересечения сферы S_{T_i} и линии $L_{\Sigma_T^*}(\tau)$. Данная точка и будет в нашей модели следующим шагом T_{i+1} итерационного процесса.

Как и в предыдущем параграфе можно сказать, в момент времени t_{i+1} цель будет находиться в точке T_{i+1} и иметь скорость $V_{T_{i+1}}$, которую можно вычислить по формуле:

$$V_{T_{i+1}} = \frac{dL_{\Sigma_T^*}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} Vx_{T_{i+1}} \\ Vy_{T_{i+1}} \\ Vx_{T_{i+1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Vy_{T_{i+1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Отметим то, что вектор частных производных

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

берется в точке T_{i+1} .

Точка T_{i+1} есть результат решения уравнения (3.15) относительно параметра t :

$$(T_i - L_{\Sigma_T^*}(t)) = (V_{T_i} \cdot \Delta t)^2, \quad (3.15)$$

где Δt — это временной промежуток дискретизации нашего итерационного процесса.

Найденное значение t подставим в формулу (3.10) и получим значение T_{i+1} , как следующего шага траектории цели.

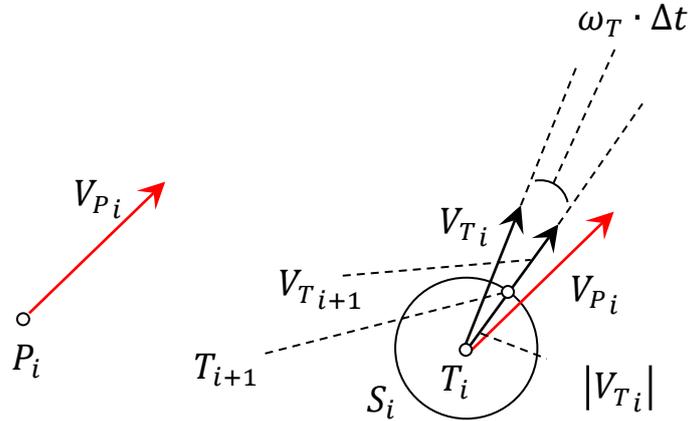


Рисунок 3.34 Стремление цели к сонаправленности скоростей

Сначала рассмотрим ситуацию на плоскости, когда преследователь и цель находятся в точках P_i и T_i в момент времени t_i (Рисунок 3.34). Они имеют направления движения V_{P_i} и V_{T_i}

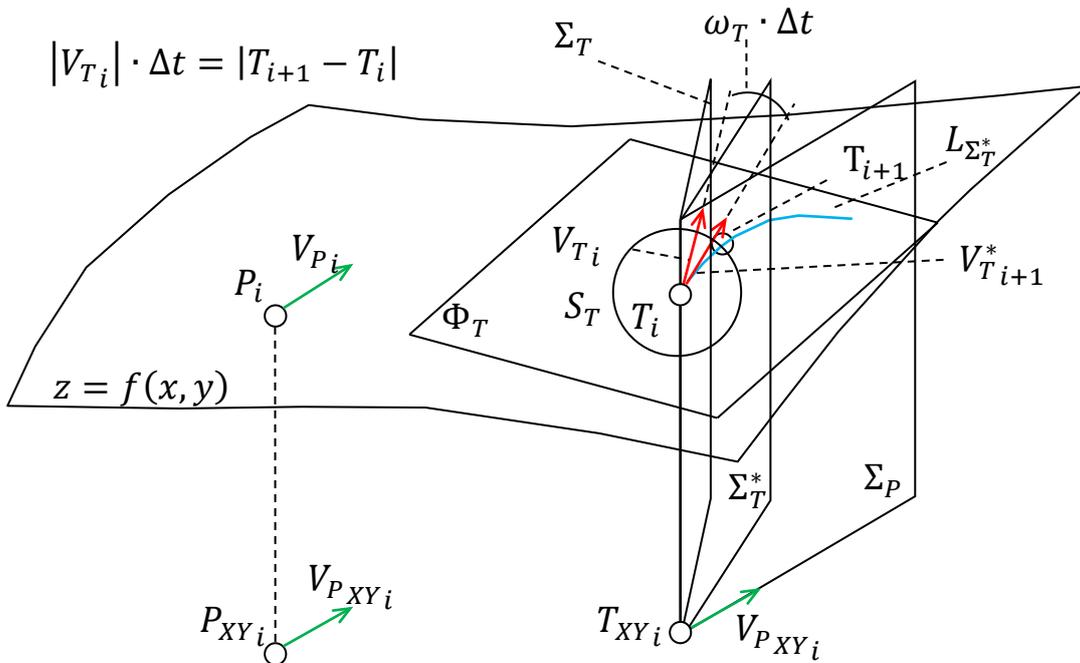


Рисунок 3.35 Корректировка направления цели на поверхности

Скорость преследователя V_{P_i} параллельно перенесем в точку текущего положения цели T_i . Вектор скорости цели V_{T_i} повернем вокруг точки T_i на угол $\omega_T \cdot \Delta t$, где ω_T — допустимая угловая скорость цели, Δt — период дискретизации нашего итерационного процесса.

В результате получим новый вектор скорости цели $V_{T_{i+1}}$, соответствующий моменту времени t_{i+1} .

В точке T_i построим окружность S_i с радиусом $|V_{T_i}| \cdot \Delta t$. Точка пересечения окружности S_i с прямой линией, направленной вдоль вектора $V_{T_{i+1}}$ и будет следующим шагом T_{i+1} итерационного процесса (Рисунок 3.35).

Теперь рассмотрим расчет траектории цели на поверхности, когда горизонтальная проекция скорости цели стремится стать параллельной горизонтальной проекции скорости преследователя.

На рисунке 3.35 показано, что преследователь P_i и цель T_i имеют векторы скоростей V_{P_i} и V_{T_i} , соответственно. Для преследователя P_i имеем ее горизонтальную проекцию P_{XY_i} и горизонтальную проекцию скорости $V_{P_{XY_i}}$. Указанную горизонтальную проекцию скорости преследователя $V_{P_{XY_i}}$ приложим к точке T_{XY_i} , которая является горизонтальной проекцией цели T_i .

В точке T_i построим касательную плоскость Φ_T к поверхности $z = f(x, y)$. Прямая $(T_i T_{XY_i})$ и приложенный к точке T_{XY_i} вектор $V_{P_{XY_i}}$ определяют плоскость Σ_P (Рисунок 2.24). Прямая $(T_i T_{XY_i})$ и вектор скорости цели V_{T_i} формируют плоскость Σ_T , которая будет вращаться вокруг прямой $(T_i T_{XY_i})$ по направлению к плоскости Σ_P . Угол вращения будет измеряться в плоскости Φ_T и будет равен $\omega_T \cdot \Delta t$, где ω_T — допустимая угловая скорость цели, Δt — период дискретизации нашего итерационного процесса.

После вращения в плоскости Φ_T вектора V_{T_i} вокруг точки T_i получаем вектор $V_{T_{i+1}}^*$ (Рисунок 2.24). Чтобы получить вектор скорости $V_{T_{i+1}}$ на следующем этапе итерации в момент времени t_{i+1} , сделаем следующее.

Вектор $V_{T_{i+1}}^*$ представим в виде:

$$V_{T_{i+1}}^* = \begin{bmatrix} Vx_{T_{i+1}} \\ Vy_{T_{i+1}} \\ Vz_{T_{i+1}} \end{bmatrix}.$$

Вектор $V_{T_{i+1}}^*$ и прямая $(T_i T_{xy_i})$ формируют плоскость Σ_T^* . Линию пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостью Σ_T^* можно представить в параметрическом виде:

$$L_{\Sigma_T^*}(t) = \begin{bmatrix} T_{x_i} + t \cdot Vx_{T_{i+1}} \\ T_{y_i} + t \cdot Vy_{T_{i+1}} \\ f(T_{x_i} + t \cdot Vx_{T_{i+1}}, T_{y_i} + t \cdot Vy_{T_{i+1}}) \end{bmatrix}.$$

Как и в предыдущих параграфах, вектор скорости представим в виде:

$$V_{T_{i+1}} = \frac{dL_{\Sigma_T^*}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} Vx_{T_{i+1}} \\ Vy_{T_{i+1}} \\ Vx_{T_{i+1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + Vy_{T_{i+1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

3.3. Модели группового преследования объектов

В данной главе мы рассмотрим несколько моделей группового преследования. Модель преследования группой одиночной цели описывает то, что участники в процессе преследования имеют различные цели и придерживаются различных стратегий. Данная модель преследования похожа на взятие противника в кольцо.

Модель группового преследования с жесткими связями описывает процесс, когда преследователи имеют строй в процессе движения. Нарушения строя не происходит. Группа преследователей имеет жесткую ориентацию в пространстве. Процесс похож на то, как будто на цель накидывают лассо.

Модель группового преследования нескольких целей с одновременным их достижением описывает итерационный процесс на основе метода следования прогнозируемым траекториям. Для того, чтобы обеспечить одновременное

достижение цели модифицируются несколько параметров движения преследователей.

В предложенной нами программе изменяются такие величины, как модуль скорости движения преследователя, так и минимальный радиус кривизны траектории.

Математические модели группового преследования реализованы в системе компьютерной математики «MathCAD».

3.3.1. Модель группового преследования одиночной цели с различными стратегиями

Рассмотрим группу преследователей, которая будет догонять одиночную цель. В этой группе преследователей, каждый будет иметь свою цель и свою стратегию достижения цели.

Пусть группа преследователей состоит из четырех участников. Разберем в этой группе цели и стратегии для каждого участника.

Пусть цель в некоторый момент времени имеет положение T на плоскости и движется со скоростью V_T .

Преследователь P_1 со скоростью V_1 имеет целью просто догнать объект T , что означает совмещение координат P_1 и T с некоторой степенью точности $|P_1 - T| \leq \varepsilon$. В качестве показателя точности можно предложить $\varepsilon = |V_1| \cdot \Delta T$, где ΔT — это период дискретизации по времени. Помимо этого объект P_1 обладает максимальной угловой скоростью вращения ω_1 , что ограничивает радиус кривизны траектории движения $R_1 = \frac{|V_1|}{\omega_1}$.

Стратегия преследователя P_1 (Рисунок 3.36) заключается в том, что координаты точки T пересчитываются в систему координат (v_1, v_2) с началом координат в точке P_1 :

$$v_1 = \frac{V_P}{|V_P|}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -v_{1y} \\ v_{1x} \end{bmatrix}$$

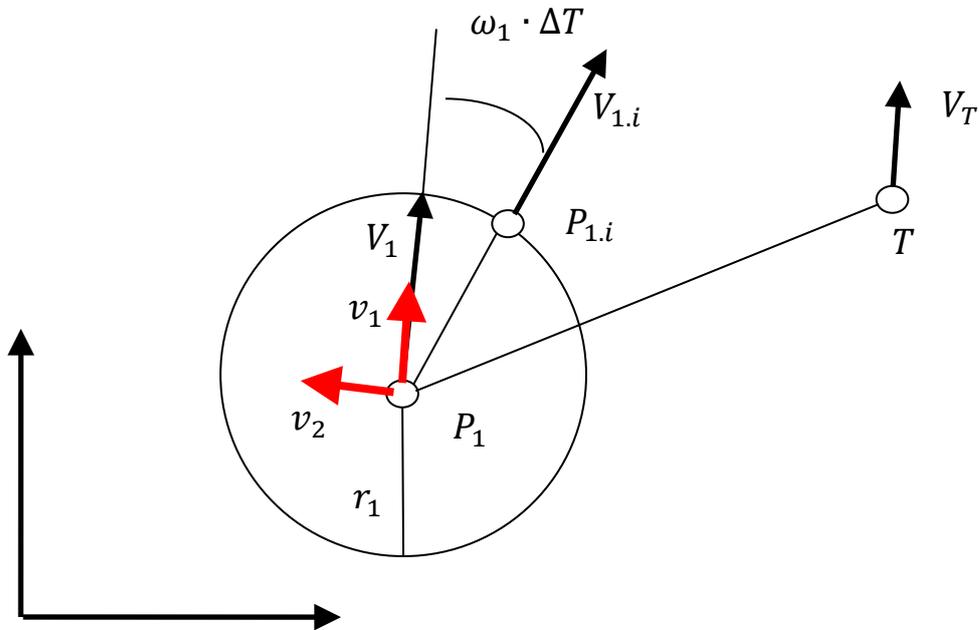


Рисунок 3.36 Стратегия первого преследователя

Там координаты точки T_v будут выглядеть так:

$$T_v = \begin{bmatrix} (T - P_1) \cdot v_1 \\ (T - P_1) \cdot v_2 \end{bmatrix}$$

Далее, совершаем анализ координат точки T_v на принадлежность к верхней или нижней полуплоскости в системе координат (v_1, v_2) с началом координат в точке P_1

$$P_{1.v} = \begin{cases} \text{if } T_{vy} \geq 0 \begin{bmatrix} |V_1| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_1 \cdot \Delta T) \\ |V_1| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_1 \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \\ \text{if } T_{vy} < 0 \begin{bmatrix} |V_1| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_1 \cdot \Delta T) \\ -|V_1| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_1 \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Необходимо, постоянно сравнивать значения углов $\omega_1 \cdot \Delta T$ и α , где α — это угол между векторами $\overrightarrow{P_1 T}$ и V_1 .

Если угол α меньше, чем угол $\omega_P \cdot \Delta T$, тогда координаты точки $P_{1.v}$ будут выглядеть иначе:

$$P_{i.v} = \begin{cases} \text{if } T_{vy} \geq 0 \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ |V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix} \\ \text{if } T_{vy} < 0 \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ -|V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Преследователи P_2 и P_3 совершают движение со скоростями V_2 и V_3 , соответственно.

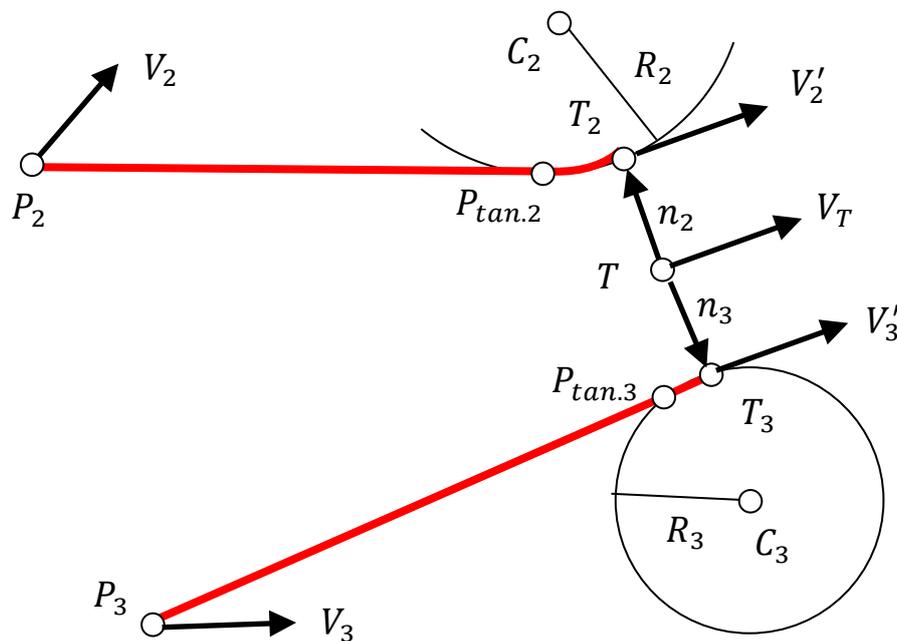


Рисунок 3.37 Стратегии второго и третьего преследователей

Для объектов P_2 и P_3 целью является совмещение с определенной степенью точности ε не с точкой T , а с точками T_2 и T_3 , соответственно (Рисунок 3.37).

Координаты точек T_2 и T_3 формируются следующим образом:

$$T_{2,3} = T + n_{2,3}$$

Векторы нормалей $n_{2,3} = \pm \frac{1}{|V_T|} \begin{bmatrix} -V_{Ty} \\ V_{Tx} \end{bmatrix} \cdot \Delta S_{2,3}$, где $\Delta S_{2,3}$ — это расстоя-

ния, на которые отстоят точки T_2 и T_3 от точки T .

мощников, не дающих ускользнуть цели, то роль четвертого преследователя можно трактовать как игрока из «засады».

На рисунке 3.38 показано два случая формирования траекторий четвертого преследователя. В первом случае траектория преследователя входит в точку положения непосредственно цели T , перпендикулярно ее скорости V_T . Во втором случае траектория преследователя входит в точку Q со скоростью противоположно направленной скорости цели V_T . Точка Q расположена на прямой из точки T с образующей V_T .

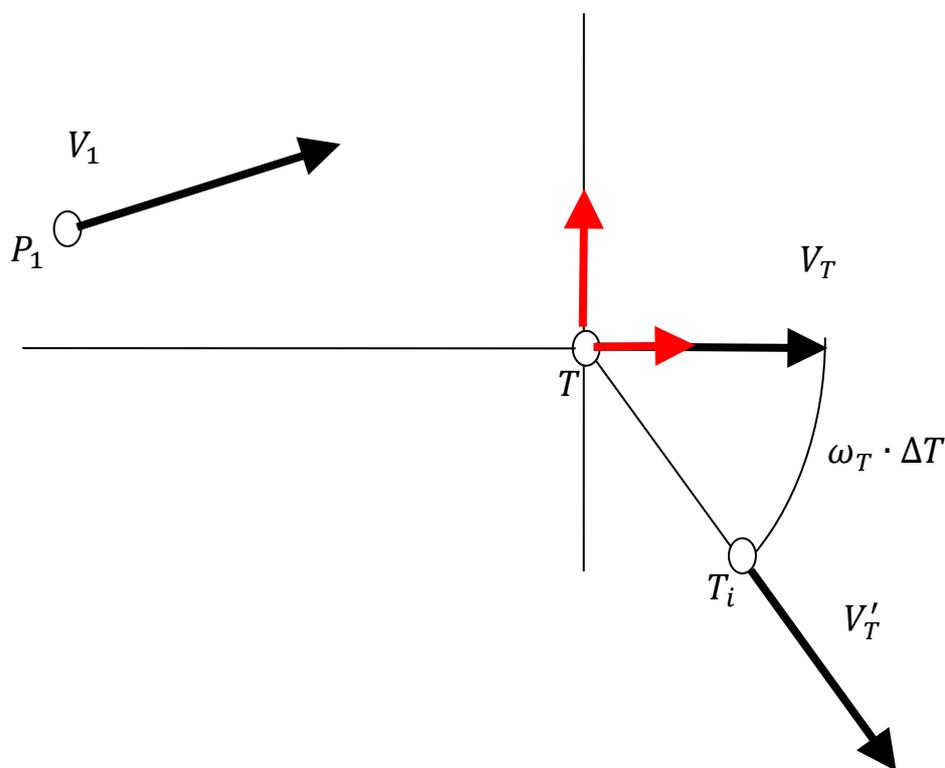


Рисунок 3.39 Стратегия объекта преследования

Точку Q можно расположить в любой точке плоскости, ничего нам этого не запрещает. Просто цель может быть не достигнута.

При достижении точки Q можно менять стратегию преследователя. Допустим, сбросить скорость до 0 и ожидать приближения цели до расстояния

меньше ε . Можно поменять стратегию при достижении точки Q на стратегию первого преследователя.

Рассмотрим поведение объекта преследования. В нашей рассматриваемой модели целью объекта преследования выбрано уклонение от первого преследователя.

Рисунок 3.39 иллюстрирует стратегию преследуемого объекта T . На этом рисунке объект T движется со скоростью V_T и с угловой скоростью вращения ω_T за период дискретизации ΔT совершает поворот на угол $\omega_T \cdot \Delta T$ и перемещение на расстояние $|T_i - T| = |V_T| \cdot \Delta T$.

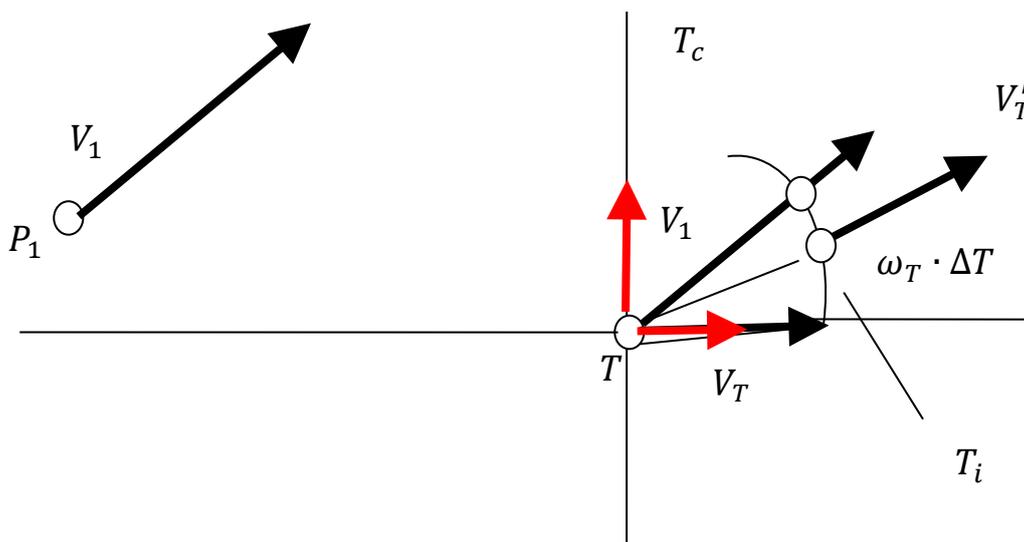


Рисунок 3.40 Дополнительная стратегия объекта преследования

Направление вращения точки T зависит от того, в какой полуплоскости находится преследователь P_1 .

Как альтернативную стратегию можно предложить стратегию, иллюстрация которой представлена на рисунке 2.29

На рисунке 3.40 показано, что объект преследования T стремится свою скорость V_T сделать параллельной вектору скорости преследователя V_1 .

Когда преследователь находится далеко, то предпочтительней для цели использовать стратегию параллельных скоростей, как на рисунке 2.29. Когда преследователь подходит на дистанцию нескольких шагов, то есть для заключительного прыжка, для цели будет выгодна стратегия уклонения, как на рисунке 3.40.

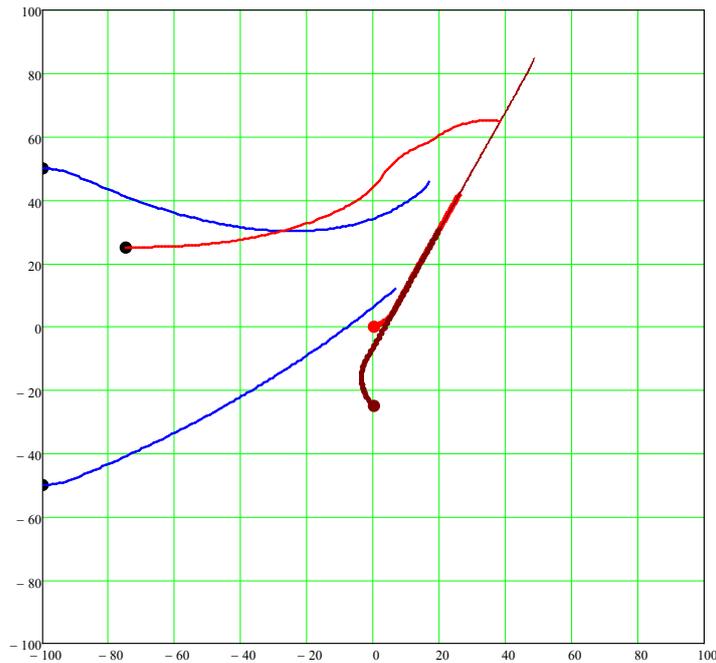


Рисунок 3.41 Результат моделирования группового преследования одиночной цели

По материалам, изложенных в данной главе, была написана тестовая программа в системе MathCAD, которая рассчитывает траектории группы из четырех преследователей и цели, уклоняющейся от них. У каждого участника геометрической модели своя цель и своя стратегия. На рисунке 3.41 показан скриншот с видео [77], где видно, как один преследователь реализует погоню по следу. Два других преследователя сопровождают цель по параллельным траекториям. Один преследователь заходит перпендикулярно прогнозируемой траектории цели. В программе намеренно изменена цель и стратегия четвертого

преследователя, чтобы показать, что в рамках нашей программы сделать это достаточно просто, задав координаты точек входа и векторов входа в точки.

Рисунок 3.41 дополнен ссылкой на анимированное изображение [77], где размещено видео по результатам работы программы.

3.3.2. Модель преследования цели группой с жесткими связями

Рассмотрим группу преследователей, состоящей из пяти участников. Пять участников — это цифра, взятая случайно, группа преследователей может составлять любое число. Отметим, что в этом случае движение не является простым, то есть не у всех участников группы движение происходит с постоянной скоростью.

Сценарий моделируемых событий таков. Один преследователь P , на рисунке 3.42 он выделен жирной точкой, преследует цель T со скоростью V_P . Преследователь P имеет угловую скорость вращения ω_P . Целью преследователя P является догнать цель T с использованием следующей стратегии.

Производится переход в локальную динамическую систему координат (v_1, v_1) с центром в точке P , $v_1 = \frac{V_P}{|V_P|}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -v_{1y} \\ v_{1x} \end{bmatrix}$. В локальную динамическую систему координат (v_1, v_1) пересчитываются координаты цели T :

$$T_v = \begin{bmatrix} (T - P) \cdot v_1 \\ (T - P) \cdot v_2 \end{bmatrix}.$$

Далее, совершаем анализ координат точки T_v на принадлежность к верхней или нижней полуплоскости в системе координат (v_1, v_2) с началом координат в точке P , совершаем вращение на угол $\omega_P \cdot \Delta T$ и шаг на расстояние $|V_P| \cdot \Delta T$:

$$P_{i,v} = \begin{cases} \text{if } T_{vy} \geq 0 & \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_P \cdot \Delta T) \\ |V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_P \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \\ \text{if } T_{vy} < 0 & \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_P \cdot \Delta T) \\ -|V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_P \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \end{cases}$$

В системе координат (v_1, v_2) с началом координат в точке P преследователь приобретает скорость:

$$V_{P_{i,v}} = |V_P| \cdot \frac{P_{i,v}}{|P_{i,v}|}$$

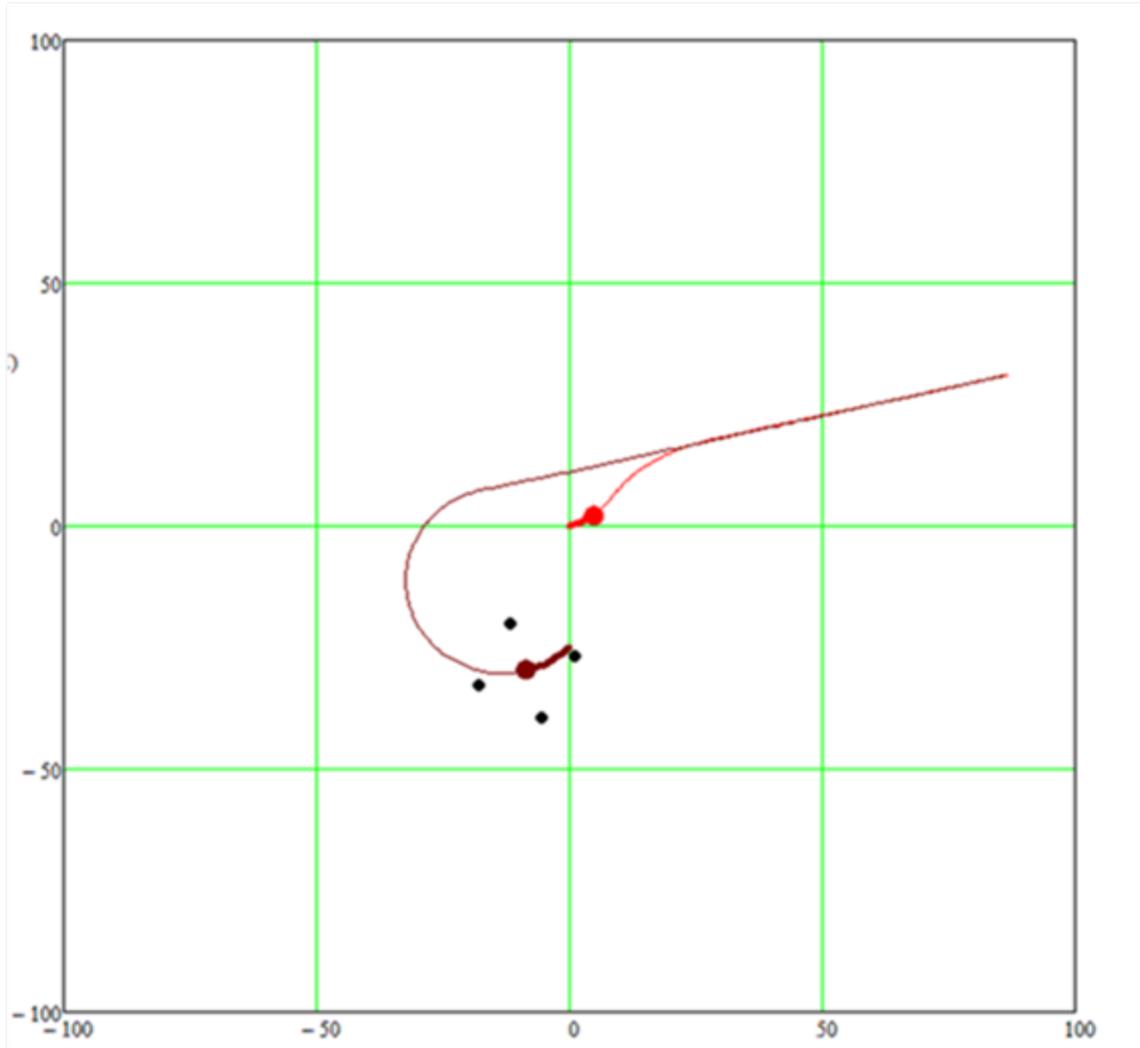


Рисунок 3.42 Групповое преследование с жесткими связями

В системе координат (v_1, v_2) группа сопровождения имеет координаты:

$$P_{1,v} = \Delta S \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_{2,v} = S \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, P_{3,v} = \Delta S \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, P_{4,v} = S \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

В мировой системе координат группа сопровождения будет выглядеть так:

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_{1,v} \cdot h_1 \\ P_{1,v} \cdot h_2 \end{bmatrix} + P, P_2 = \begin{bmatrix} P_{2,v} \cdot h_1 \\ P_{2,v} \cdot h_2 \end{bmatrix} + P$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{3,v} \cdot h_1 \\ P_{3,v} \cdot h_2 \end{bmatrix} + P, P_4 = \begin{bmatrix} P_{4,v} \cdot h_1 \\ P_{4,v} \cdot h_2 \end{bmatrix} + P$$

Координаты преследователя P в мировой системе координат после совершения шага итерации будут выглядеть так:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i,v} \cdot h_1 \\ P_{i,v} \cdot h_2 \end{bmatrix} + P.$$

Направление и модуль скорости в мировой системе координат будут такими:

$$V_{P_i} = \begin{bmatrix} V_{P_{i,v}} \cdot h_1 \\ V_{P_{i,v}} \cdot h_2 \end{bmatrix}.$$

Где h_1 и h_2 — это разложение векторов H_1 и H_2 мировой системы координат по базису (v_1, v_2) преследователя.

В модели, приведенной в данном параграфе, поведение цели T определяется поведением преследователя P . Цель уклоняется от преследователя после анализа в своей динамической системе координат преследователя:

$$T_{i,v} = \begin{cases} \text{if } P_{v_y} \geq 0 & \begin{bmatrix} |V_T| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_T \cdot \Delta T) \\ -|V_T| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_T \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \\ \text{if } P_{v_y} < 0 & \begin{bmatrix} |V_T| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_T \cdot \Delta T) \\ |V_T| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_T \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Скорость после совершения шага итерации, системе координат цели будет:

$$V_{T_{i,v}} = |V_T| \cdot \frac{T_{i,v}}{|T_{i,v}|}.$$

Перевод в мировую систему координат из системы координат цели будет следующим:

$$T_i = \begin{bmatrix} T_{i,v} \cdot h_1 \\ T_{i,v} \cdot h_2 \end{bmatrix} + T$$

$$V_{T_i} = \begin{bmatrix} V_{T_{i,v}} \cdot h_1 \\ V_{T_{i,v}} \cdot h_2 \end{bmatrix}.$$

Где h_1 и h_2 — это разложение векторов H_1 и H_2 мировой системы координат по базису (v_1, v_2) цели.

Рисунок 3.42 дополнен ссылкой на анимированное изображение [78], изготовленное по результатам работы тестовой программы.

3.3.3. Модели группового преследования нескольких целей с временными критериями достижения

В данном параграфе рассматривается кинематическая модель преследования группой нескольких цели методом параллельного сближения. Модель основывается на том, что преследователи стараются придерживаться заранее спроектированных траекторий. Траектории преследователей имеют ограничения по кривизне. Начальные направления скоростей преследователей имеют произвольный характер, что вносит изменения в известный метод параллельного сближения. В нашей модели цели достигаются преследователями одновременно. Это происходит из-за изменения длин прогнозируемых траекторий таким образом, чтобы синхронизировать время достижения цели. Изменение длин прогнозируемых траекторий происходит за счет увеличения радиуса кривизны на первоначальном участке траектории.

Особенностью метода параллельного сближения на плоскости является то, что скорость преследователя P_i в некоторый момент времени направлена в точку на окружности Аполлония. На рисунке 2.32 это точка K_i , а точка T_i — положение цели в данный момент времени.

Итерационная схема метода параллельного сближения представлена на рисунке 3.43. Координаты преследователя P_i будут рассчитываться таким образом:

$$P_{i+1} = P_i + V_P \cdot \frac{P_i K_i}{|P_i K_i|} \cdot \Delta T, T_{i+1} = T_i + V_T \cdot \frac{T_i K_i}{|T_i K_i|} \cdot \Delta T.$$

Где ΔT — дискретный временной промежуток.

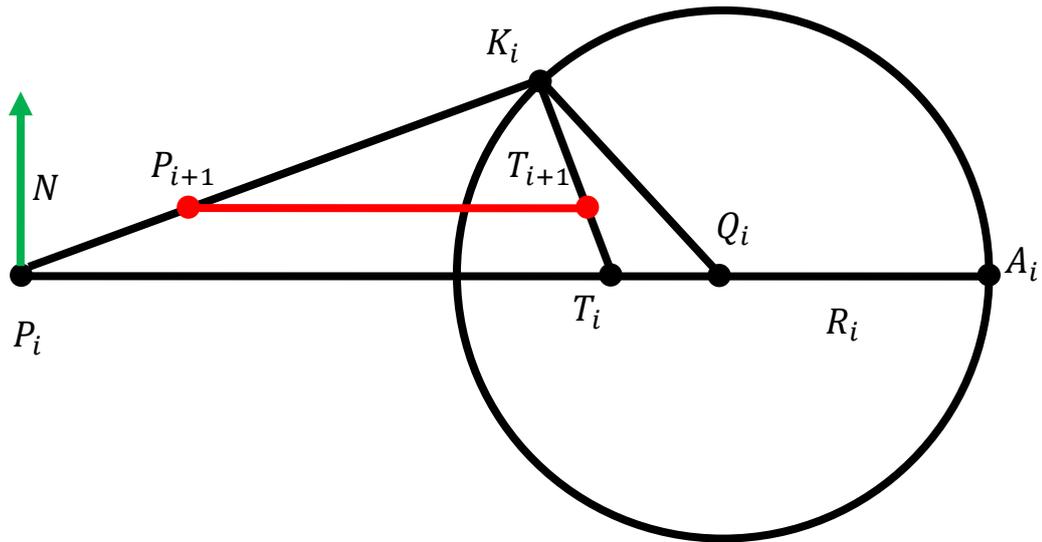


Рисунок 3.43 Метод параллельного преследования

Радиус R_i и центр окружности Аполлония Q_i рассчитываются следующим образом:

$$R_i = \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot |T_i - P_i|, Q_i = T_i + \frac{V_T^2}{V_P^2 - V_T^2} \cdot (T_i - P_i).$$

Координаты точки K_i есть результат решения системы уравнений относительно непрерывного параметра t :

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + V_T \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{|T_{i+1} - T_i|} \cdot t. \end{cases}$$

Из описания метода параллельного сближения видно, что начальная скорость преследователя не может иметь произвольного направления.

В данном параграфе мы хотим реализовать метод, близкий к методу параллельного сближения. На начальном этапе решения рассмотрим двух преследователей P_1, P_2 , скорости которых V_1, V_2 направлены произвольно (Рисунок 3.44). Цель T движется прямолинейно и равномерно.

Радиус кривизны траекторий движения преследователей не может меньше определенной величины. Поэтому мы формируем однопараметрические множества составных линий, являющихся аналогом линии визирования $(P_i T_i)$. В нашем случае, это будут составные линии, соединяющих точки P_1, P_2

с точкой T (Рисунок 3.44), состоящие из сегмента дуги и прямолинейного отрезка.

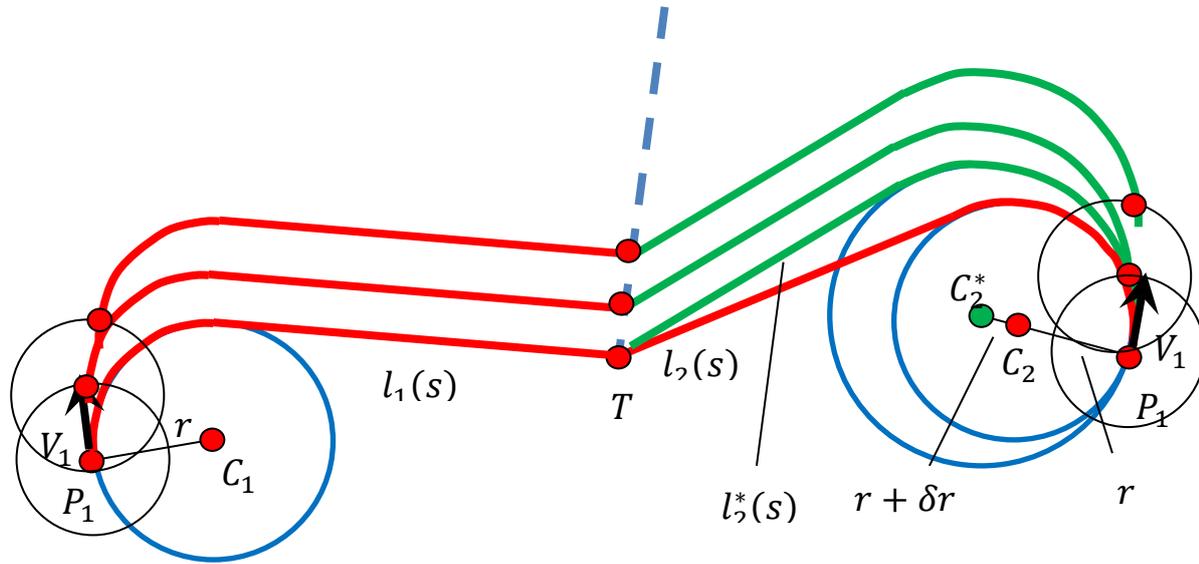


Рисунок 3.44 Преследование одной цели двумя преследователями

Допустим, преследователь P_2 при расчете траектории для достижения цели T имеет меньшее время. Мы можем изменять радиус кривизны прогнозируемой траектории преследователя P_2 в сторону увеличения (Рисунок 3.44), чтобы достичь одновременного достижения цели совместно с P_1 .

Если мы добавим еще одну цель и еще одного преследователя (Рисунок 3.45), то в этом случае, эталоном выбирается преследователь, имеющий наибольшее время достижения своей цели при предварительном расчете.

На рисунке 3.45 показано, преследователи P_1, P_2 преследуют цель T_1 , а преследователь P_3 преследует цель T_2 .

Была написана тестовая программа, где преследователи P_2 и P_3 изменяют радиус кривизны прогнозируемых траекторий, подстраиваясь под время достижения преследователем P_1 цели T_1 .

Для решения поставленной задачи, мы должны смоделировать для каждого из преследователей составную кривую (Рисунок 3.46).

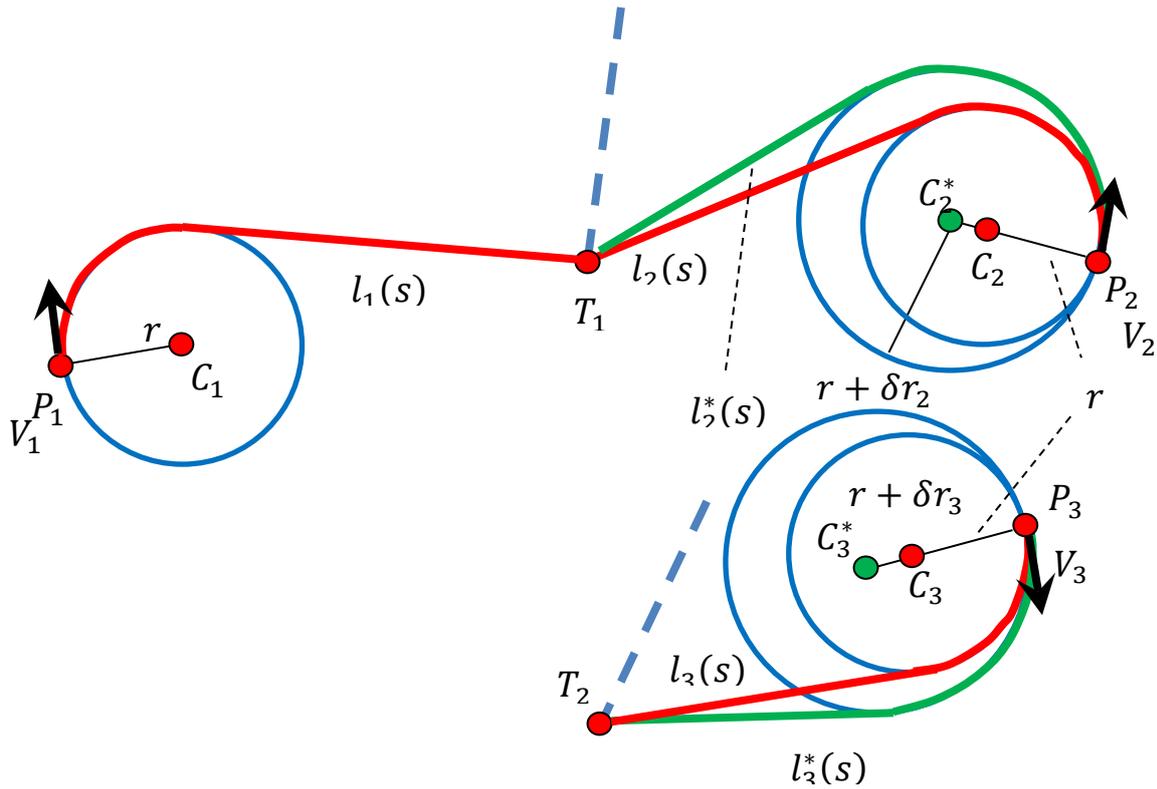


Рисунок 3.45 Групповое преследование группы целей

Так как в нашей модели существуют ограничения на кривизну траектории всех участников задачи преследования, то наш преследователь P в прогнозируемой траектории (Рисунок 3.46) пройдет по дуге $P\bar{P}_t$, потом выйдет на прямолинейный участок $[P_t T]$ до цели T .

Радиус кривизны r окружности (C, r) в нашей модели считается заданным и может изменяться только в сторону увеличения.

Центр C окружности (C, r) удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{aligned} |C - P| &= r \\ V \cdot (C - P) &= 0 \end{aligned}$$

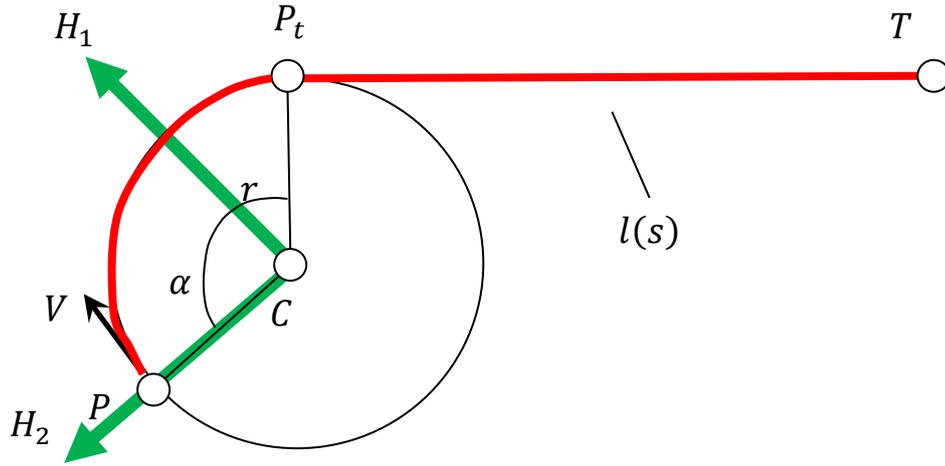


Рисунок 3.46 Моделирование множества параллельных линий

В локальной системе координат (H_1, H_2) с центром в точке C уравнение дуги $\overline{PP_t}$ будет:

$$L_{circle}(\alpha)^* = r \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \end{bmatrix}.$$

Где α принимает значения от 0 до $\arccos\left(\frac{(P-C) \cdot (P_t-C)}{|P-C| \cdot |P_t-C|}\right)$. Базисные векторы (H_1, H_2) равны:

$$H_1 = \frac{V}{|V|}, H_2 = \frac{P - C}{|P - C|}.$$

Перевод в мировую систему координат линии $L_{circle}(\alpha)$ будет таким:

$$L_{circle}(\alpha) = \begin{bmatrix} L_{circle}(\alpha)^* \cdot E_1^* \\ L_{circle}(\alpha)^* \cdot E_2^* \end{bmatrix} + C$$

$$E_1^* = \begin{bmatrix} E_1 \cdot H_1 \\ E_1 \cdot H_2 \end{bmatrix}, E_2^* = \begin{bmatrix} E_2 \cdot H_1 \\ E_2 \cdot H_2 \end{bmatrix}$$

E_1, E_2 – базисные векторы МСК

Уравнение для прямолинейного участка $[P_tT]$ представим в виде:

$$L_{line}(\varepsilon) = (1 - \varepsilon) \cdot P_t + \varepsilon \cdot T.$$

Полученные сегменты линий $L_{circle}(\alpha)$ и $L_{line}(\varepsilon)$ необходимо объединить в одну составную линию и выполнить параметризацию от длины дуги.

В программе, написанной по материалам главы, мы получили объединенные массивы координат $\{X_i, Y_i\}, i \in 0..N$ нашей составной кривой. Введем формальный параметр τ , который непрерывно пробегает значения от 0 до N .

После процедуры кубической сплайн-интерполяции будем иметь непрерывные координатные функции $X(\tau)$ и $Y(\tau)$ от параметра τ .

Из уравнения для полного дифференциала длины дуги $ds^2 = dX^2 + dY^2$ мы получим дифференциальное уравнение первого порядка для дальнейшей передачи во встроенные решатели задачи Коши:

$$D(\tau, s) = \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\frac{dX^2}{d\tau} + \frac{dY^2}{d\tau}}}, \tau(0) = 0.$$

Таким образом, нами получены зависимости $X(s)$ и $Y(s)$ от параметра длины дуги. Если параметр длину будет удовлетворять соотношению $s = V \cdot t$, где t — это реальное время, то мы получим зависимости $X(t)$ и $Y(t)$, являющимися координатными функциями базовой линии $l(t)$.

Составную линию, которая соединяет преследователя и цель, в момент начала преследования назовем базовой линией.

Для того чтобы выделить линию, соответствующую положению цели $T(t)$, необходимо к базовому уравнению линии $l(t)$ прибавить вектор $T(t) - T(0)$ (Рисунок 3.47).

Если у нас возникает необходимость увеличения длины базовой линии, то мы увеличиваем радиус минимальной кривизны. Вообще, длина базовой линии зависит от следующих параметров: координат цели T , координат преследователя P , вектора скорости V преследователя и радиуса r минимального радиуса кривизны (Рисунки 3.44, 3.45).

Пусть наш преследователь P имеет модуль скорости V_p . В нашей задаче в момент t_i рассчитаны координаты точек преследователя P_i и цели T_i . Рассчитана от своей длины дуги уравнение линии прогнозируемого движения $l_i(s)$.

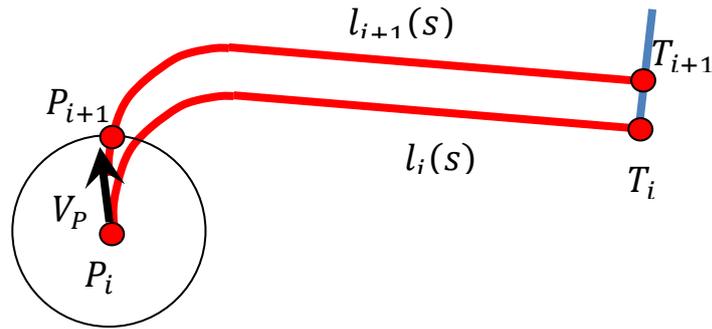


Рисунок 3.47 Расчет следующего шага преследователя

В момент времени t_{i+1} является известным координаты цели T_{i+1} . Тогда линия параллельного сдвига $l_{i+1}(s)$ вычисляется так:

$$l_{i+1}(s) = l_i(s) + (T_{i+1} - T_i).$$

Точка следующего шага преследователя P_{i+1} есть точка пересечения линии $l_{i+1}(s)$ и окружности радиуса $V_P \cdot (t_{i+1} - t_i)$ с центром в точке P_i (Рисунок 3.47).

В тестовой программе рассчитываются сначала ориентировочные промежутки времени достижения преследователями своих целей. Затем, выбирается наибольший в качестве эталонного. Затем в цикле делаются малые приращения радиуса допустимой кривизны базовых траекторий δr (Рисунки 3.44, 3.45) до тех, пока не произойдет выравнивание значений временных промежутков.

По материалам главы разработана тестовая программа, в которой два преследователя с первоначальными произвольными направлениями скоростей начинают преследовать цель, движущуюся прямолинейно с постоянной скоростью.

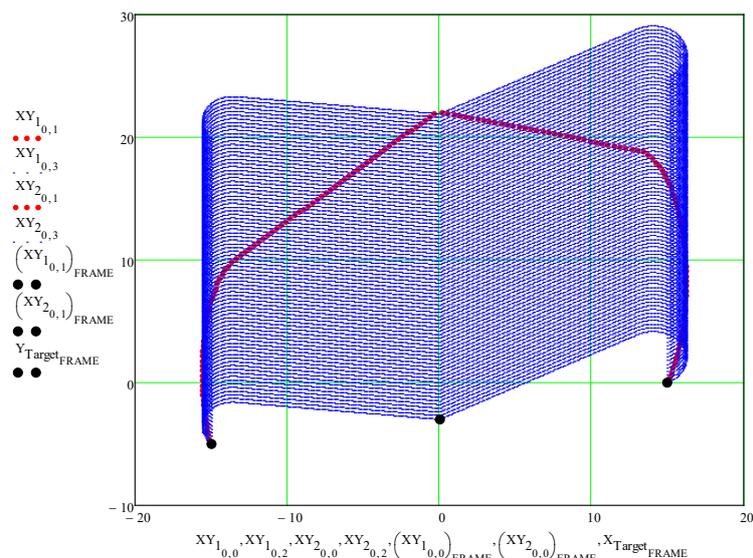


Рисунок 3.48 Преследование одной цели двумя преследователями

На рисунке 3.48 представлен первый кадр работы программы. Рисунок 3.48 дополнен ссылкой на анимированное изображение [79].

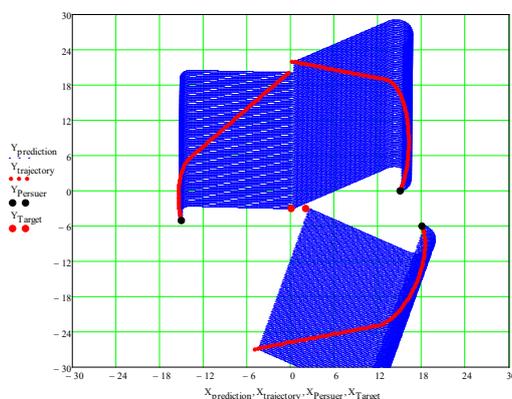


Рисунок 3.49 Преследование двух целей группой из трех преследователей

Была создана программа преследования группой из трех преследователей группы из двух целей. Достижение целей происходит одновременно.

На рисунке 3.49 представлен первый кадр анимированного изображения [80] модели одновременного достижения цели.

На рисунке 3.50 размещен первый кадр анимированного изображения, где показан итерационный процесс преследования без прогнозируемых линий движения траекторий преследователей.

Рисунок 3.50 также дополнен ссылкой на анимированное изображение [81].

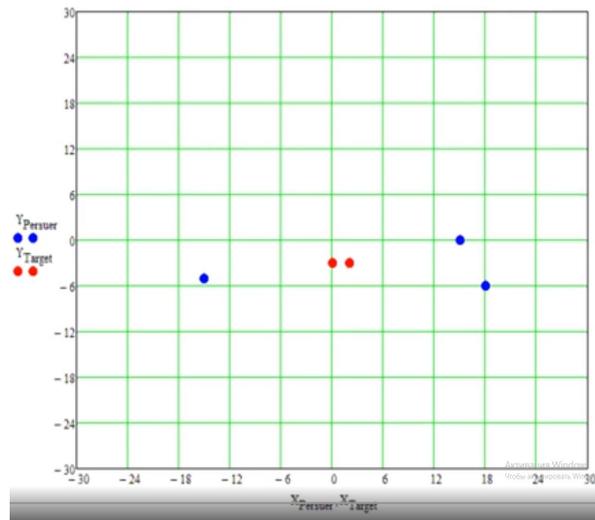


Рисунок 3.50 Преследование двух целей группой из трех преследователей без вспомогательных линий

Изложенная в параграфе, математическая модель задачи преследования предполагает, что траектории преследователей в определенный момент времени рассчитываются так, как будто цели движутся прямолинейно и равномерно. Но ничего не мешает нам сделать расчеты прогнозируемых траекторий для иных направлений движения целей, с иными скоростями.

Мы решили не делать изменения направлений в тестовой программе, чтобы не добавлять дополнительный вложенный расчетный цикл в итерационный процесс.

Основным в предлагаемой модели является наложение ограничений на кривизну траекторий преследователей. Что является характерным для объектов, не имеющих возможности изменять направление скорости мгновенно.

Важным вопросом в представленной модели является распределение преследователей по целям. В тестовой программе распределение производилось

вручную. Хотелось бы иметь автоматизированное распределение по целям, без участия оператора. Основным в разработанной модели является расчет и модификация базовых линий для синхронизации с максимальным временем достижения одного из преследователей своей цели.

Если является возможным произвести моделирование процесса одновременного достижения целей, то мы сможем изменить модель, где достижение целей будет происходить по таймеру.

3.4. Модель коррекции траектории движения преследователя в пространстве при стремлении к параллельному сближению

В данной главе предложена к рассмотрению кинематическая модель итерационного расчета траектории преследователя. По материалам главы составлена математическая модель построения траектории преследователя, сближающегося с целью в пространстве. Скорости преследователя и цели в момент начала итерационного процесса направлены произвольно.

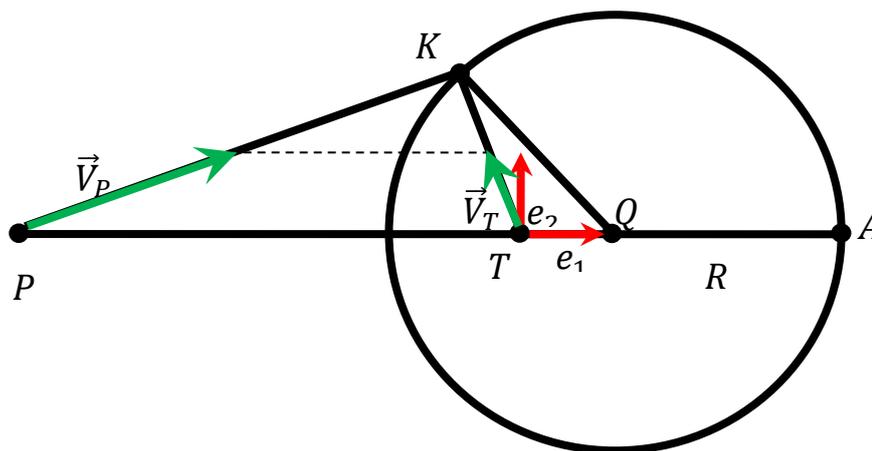


Рисунок 3.41 Окружность Аполлония

Суть представленного метода заключается в том, что преследователь плавно с допустимой угловой скоростью изменяет направление движения до

тех пор, пока оно не будет совмещено с направлением на точку, принадлежащей окружности Аполлония, как в методе параллельного сближения. Допустимая угловая скорость определяется условием, что радиус кривизны траектории преследователя не может быть меньше определенного значения при заданной скорости движения. Разработанная квазидискретная модель построения траектории преследователя может быть востребована разработчиками программного обеспечения для беспилотных барражирующих устройств с автономным управлением.

Метод параллельного сближения на плоскости основывается на том, направления преследователя P и цели T в заданный момент времени t пересекаются в точке K (Рисунок 3.41).

Точка K принадлежит к окружности Аполлония. Окружностью Аполлония называется геометрическое место точек K , у которых неизменным является отношение расстояний до точек плоскости P и T : $|KP|/|KT| = const$. В работах основоположников теории игр показано, что стратегия параллельного сближения на плоскости является оптимальным для преследователя, то есть обеспечивающим кратчайшее время достижения цели.

В случае параллельного сближения на плоскости имеет место быть постоянным соотношением:

$$\frac{|KP|}{|KT|} = \frac{|\vec{V}_P|}{|\vec{V}_T|} = k,$$

где \vec{V}_P — вектор скорости преследователя P , а \vec{V}_T — вектор скорости цели T . Радиус окружности Аполлония равен (Рисунок 2.40):

$$R = \frac{k}{|k^2 - 1|} \cdot |T - P|.$$

Центр окружности Аполлония рассчитывается так (Рисунок 3.41):

$$Q = P + \frac{k^2}{k^2 - 1} \cdot (T - K).$$

Поскольку, направления скоростей преследователя и цели, \vec{V}_P и \vec{V}_T , соответственно, находятся в зависимости друг от друга, а именно, они в заданный момент времени должны быть направлены в точку K на окружности Аполлония. Задавая значение вектора \vec{V}_T , мы определяем точку K и значение вектора \vec{V}_P .

Точка K (Рисунок 3.41), в зависимости от вектора \vec{V}_T , является решением системы уравнений (3.16):

$$\begin{cases} (K - Q)^2 = R^2 \\ K = T + \vec{V}_T \cdot \tau \end{cases} \quad (3.16)$$

Система уравнений (1) преобразуется к квадратному уравнению, относительно параметра τ :

$$(\vec{V}_T \cdot \vec{V}_T) \cdot \tau^2 + 2 \cdot (T - Q) \cdot \vec{V}_T \cdot \tau + (T - Q)^2 - R^2 = 0.$$

Полученное значение τ подставляем во второе уравнение системы (3.16) и получаем координаты точки K на окружности Аполлония в зависимости от вектора \vec{V}_T скорости преследователя T . Точка K определяет направление вектора \vec{V}_P скорости движения преследователя P .

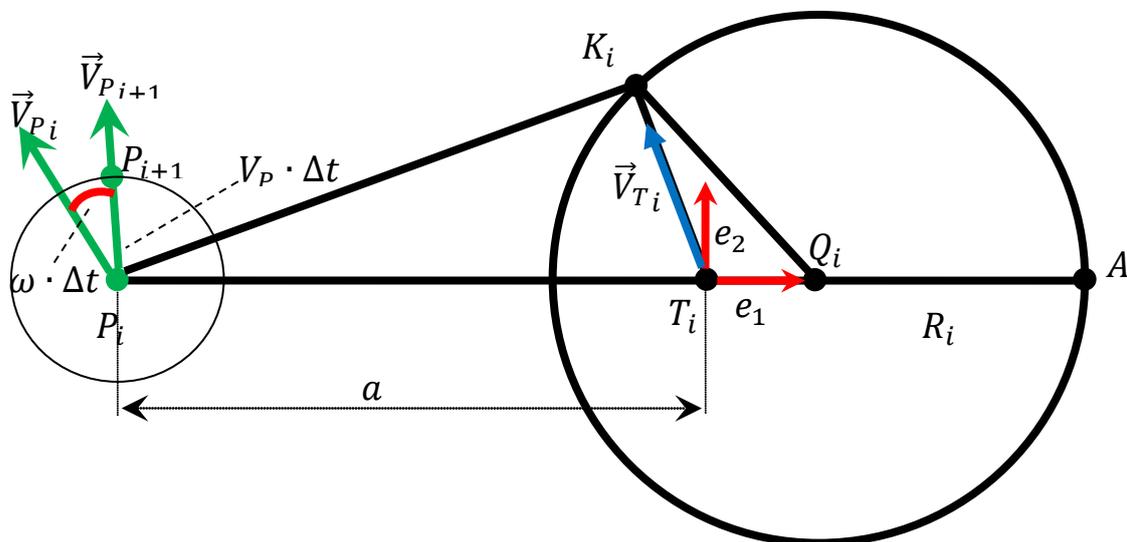


Рисунок 3.42 Корректировка направления при параллельном сближении

Целью главы является разработать квазидискретную модель построения траектории преследователя.

Преследователь и цель движутся в пространстве. Вектор скорости преследователя направлен произвольно (Рисунок 3.42).

В определенные дискретные моменты времени преследователь будет совершать поворот на допустимый угол и совершать шаг на допустимое расстояние. Плоскость задается вектором \overrightarrow{PK} , вектором скорости \vec{V}_P и точкой положения преследователя P .

Для определенности, поскольку написана тестовая программа в системе компьютерной математики MathCAD, в геометрической модели принято, что цель T движется прямолинейно и равномерно.

Пусть в некоторый момент t_i преследователь находится в точке пространства P_i , имея при этом вектор скорости \vec{V}_{P_i} , а цель находится в точке T_i со скоростью \vec{V}_{T_i} (Рисунок 3.43). Преследователь не может менять направление движения мгновенно, поэтому в модели считается, что на траекторию движения преследователя наложены ограничения по кривизне. Радиус кривизны в точках траектории не может быть меньше определенной величины R_{min} . Соответственно, мгновенная частота вращения не может превышать величину:

$$\omega = \frac{V_P}{R_{min}}$$

V_P — это модуль скорости равномерного движения преследователя.

За промежуток времени Δt , на которые равномерно поделен отрезок времени квазидискретный итерационный процесс преследования, преследователь может совершить поворот на угол $\alpha = \omega \cdot \Delta t$.

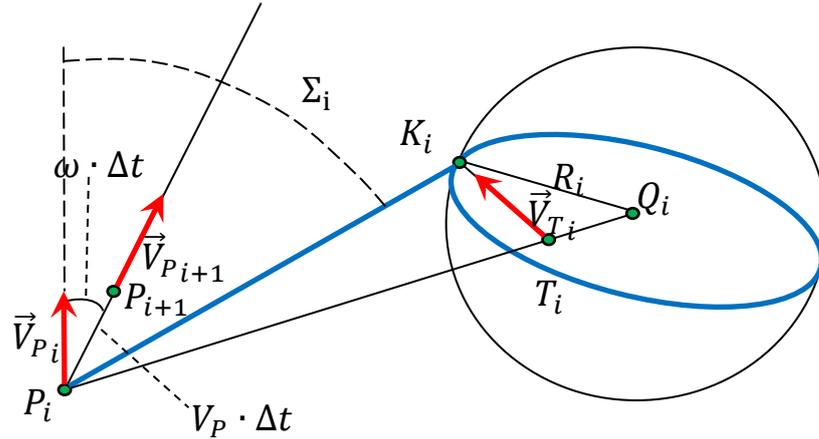


Рисунок 3.43 Итерационный процесс в пространстве

Окружность Аполлония в пространстве (Рисунок 2.42) в определенный момент времени t_i лежит в плоскости, образованной точкой P_i , линией визирования $(P_i T_i)$ вектором скорости движения \vec{V}_{T_i} . Для нахождения точки K_i необходимо решить систему уравнений (2.16):

$$\begin{cases} (K_i - Q_i)^2 = R_i^2 \\ K_i = T_i + \vec{V}_{T_i} \cdot \tau \end{cases} \quad (3.17)$$

Первое уравнение системы (3.17) в отличие от системы (3.16) показывает, что это не окружность, а сфера с центром в точке Q_i радиуса R_i , задача рассматривается в пространстве. Радиус сферы, содержащей окружность Аполлония: $R_i = \frac{k}{|k^2 - 1|} \cdot |T_i - P_i|$, где k — есть отношение модулей скоростей преследователя и цели в момент времени t_i . Центр сферы рассчитывается по формуле:

$$Q_i = P_i + \frac{k^2}{k^2 - 1} \cdot (T_i - K_i).$$

Преследователь в течении промежутка времени Δt может совершить поворот на угол $\omega \cdot \Delta t$. Вращение будет совершаться в плоскости Σ_i . Плоскость

Σ_i образована линией визирования $(P_i K_i)$, вектором \vec{V}_i направления движения преследователя и опорной точкой P_i .

Для того, чтобы совершить шаг и поворот в плоскости Σ_i , целесообразно перейти в локальный базис (E_1, E_2, E_3) , где базисные векторы рассчитываются так (Рисунок 3.43):

$$E_1 = \frac{K_i - P_i}{|K_i - P_i|}, E_3 = \frac{(K_i - P_i) \times \vec{V}_{P_i}}{|(K_i - P_i) \times \vec{V}_{P_i}|}, E_2 = \frac{E_3 \times E_1}{|E_3 \times E_1|}.$$

На рисунке 3.44 также отображена мировая система координат (H_1, H_2, H_3) с центром в точке O . Базисные векторы мировой системы координат выглядят так:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Базисные векторы мировой системы координат в системе координат (E_1, E_2, E_3) выглядят так (h_1, h_2, h_3) :

$$h_1 = \begin{bmatrix} E_1 \cdot H_1 \\ E_2 \cdot H_1 \\ E_3 \cdot H_1 \end{bmatrix}, h_2 = \begin{bmatrix} E_1 \cdot H_2 \\ E_2 \cdot H_2 \\ E_3 \cdot H_2 \end{bmatrix}, h_3 = \begin{bmatrix} E_1 \cdot H_3 \\ E_2 \cdot H_3 \\ E_3 \cdot H_3 \end{bmatrix}.$$

Если в мировой системе координат преследователь P_i делает шаг за время Δt : $\overline{\Delta P} = P_i + \vec{V}_{P_i} \cdot \Delta t$, то в системе координат (E_1, E_2, E_3) с центром в точке P_i шагу будет соответствовать точка:

$$P^* = \begin{bmatrix} (\overline{\Delta P} - P_i) \cdot E_1 \\ (\overline{\Delta P} - P_i) \cdot E_2 \\ (\overline{\Delta P} - P_i) \cdot E_3 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Угол α между вектором направления движения \vec{V}_{P_i} преследователя и линией визирования $(P_i K_i)$ равен:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\vec{V}_{P_i} \cdot E_1}{|\vec{V}_{P_i}| \cdot |E_1|} \right).$$

Допустимый угол поворота α_0 есть $\alpha_0 = \omega \cdot \Delta t$. Положение преследователя P^{**} после шага и поворота в системе координат (E_1, E_2, E_3) будет рассчитываться так:

$$P^{**} = \begin{bmatrix} |P^*| \cdot \cos(\alpha_n) \\ |P^*| \cdot \sin(\alpha_n) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Где $\alpha_n = \alpha - \alpha_0$.

Перевод точки P^{**} из локальной системы координат (E_1, E_2, E_3) с центром в точке P_i в мировую систему координат с центром в точке O (Рисунок 3.44) осуществляется следующим образом:

$$P_{i+1} = \begin{bmatrix} P^{**} \cdot h_1 \\ P^{**} \cdot h_2 \\ P^{**} \cdot h_3 \end{bmatrix} + P_i.$$

Соответственно новый вектор скорости преследователя станет таким:

$$\vec{V}_{i+1} = V_P \cdot \frac{P_{i+1} - P_i}{|P_{i+1} - P_i|}.$$

Где V_P — это модуль скорости равномерного движения преследователя.

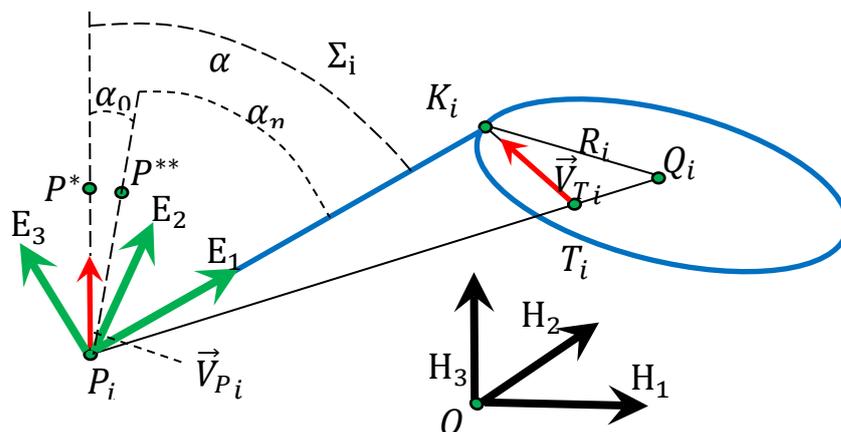


Рисунок 3.44 Формирование локального базиса

Разработана программа в системе компьютерной математики MathCAD, в которой цель движется в пространстве прямолинейно и равномерно. В начале

каждого цикла этой программы рассчитывается угол α (Рисунок 3.44). Угол α сравнивается со значением угла возможного поворота α_0 за период времени Δt .

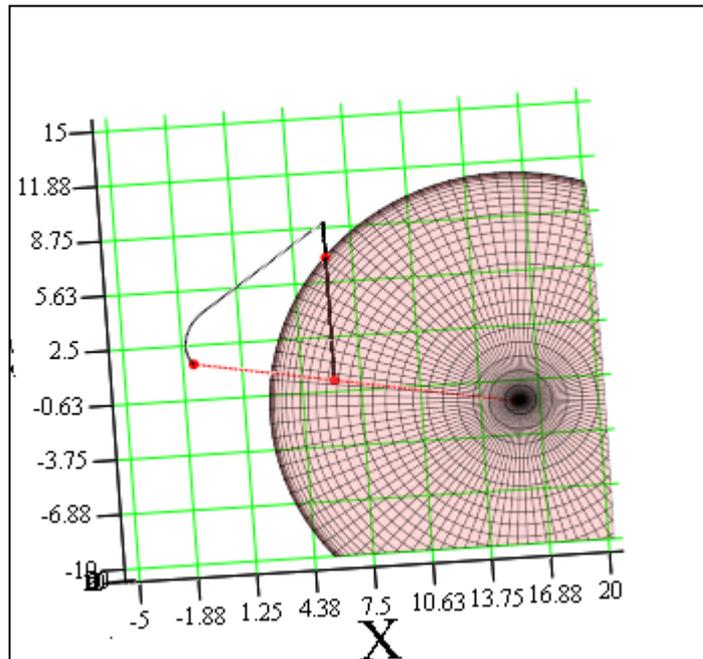
Если угол $\alpha > \alpha_0$, то алгоритм рассчитывает шаг и поворот, как указано в формулах (3.18) и (3.19).

Если угол $\alpha \leq \alpha_0$, то следующий шаг преследователя P_{i+1} принадлежит линии визирования $(P_i K_i)$, то есть $\alpha_n = 0$ (Рисунок 3.44). Соответственно, скорость в следующий момент времени $\vec{V}_{P_{i+1}}$ будет сонаправлена с линией визирования $(P_i K_i)$.

В тестовой программе цель движется равномерно и прямолинейно, что для рассматриваемой модели не имеет значения. Результат работы программы представлен на рисунке 3.45. Рисунок 3.45 дополнен ссылкой на анимированное изображение, где можно будет просмотреть траекторию преследователя в двух плоскостях проекций [82].

В тестовой программе процесс преследования происходит на участке пространства размерами $[-10; 20] \times [-10; 2] \times [-10; 20]$.

Модуль скорости равномерного движения преследователя составляет 16 м/с , скорость цели равна 12 м/с .



$$Sp_{pic}, (X, Y, Z), (X_P, Y_P, Z_P), (X_T, Y_T, Z_T), L_{PQ}$$

Рисунок 3.45 Моделирование траектории преследователя

Вектор направления движения преследователя в момент начала процесса преследования равен:

$$\begin{bmatrix} -0.579 \\ 0.579 \\ 0.573 \end{bmatrix}.$$

Движение цели происходит равномерно и прямолинейно вдоль вектора:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Радиус кривизны траектории преследователя не должен быть меньше двух метров.

На рисунке 3.45 отображена траектория движения преследователя от момента начала преследования до достижения цели. По истечении некоторого промежутка времени траектория преследователя переходит на прямолинейный участок. Во время движения по прямой скорость преследователя направлена на точку на окружности Аполлония, которая расположена в плоскости, обра-

зованной векторами движениями преследователя, цели и точкой расположения преследователя.

До момента перехода на прямолинейный участок траектория преследователя представляет собой плавную кривую, которая удовлетворяет ограничениям по кривизне.

3.5. Расчет параметров параллельного сближения на основе многофакторного анализа

Данная глава посвящена тому, как в задаче группового преследования добиться одновременного достижения преследователями своих целей. Предложенная модель преследования основана на том, что преследователь следует однопараметрической сети прогнозируемых траекторий движения. Прогнозируемая траектория движения выстраивается в каждый момент времени. Такая траектория является составной кривой, учитывающей ограничения по кривизне. В модели одновременного достижения целей время достижения цели каждого преследователя есть функция от скорости движения и минимального радиуса кривизны траектории. В модели производится анализ модулей скоростей и минимальных радиусов кривизны траекторий каждого из преследователей для одновременного достижения своих целей и есть цель для исследований.

Рассмотрим модель расчета траектории преследователя на плоскости, где в каждый момент времени от преследователя до цели строится прогнозируемая траектория, которой преследователь будет стараться придерживаться (Рисунок 3.46).

Кривые $l_1(s)$, $l_2(s)$, $l_3(s)$ (Рисунок 3.46) состоят из сегмента дуги окружности и прямолинейного отрезка. Радиус окружностей и есть ограничение по кривизне прогнозируемых траекторий движения преследователей в нашей модели. Если преследователь находился в момент начала преследования в точке P_i с вектором скорости V_i , то центр окружности C_i радиуса r_i будет находиться в точке:

$$C_i = P_i \pm r_i \cdot \frac{\begin{bmatrix} -V_{iy} \\ V_{ix} \end{bmatrix}}{|V_i|}.$$

Затем из точки положения цели T_i строится касательная к окружности (C_i, r_i) . Совокупность касательной и окружности будет базовой линией прогнозируемой траектории движения преследователя $l_i(s)$. Отметим, что в уравнении базовой линии из однопараметрического множества

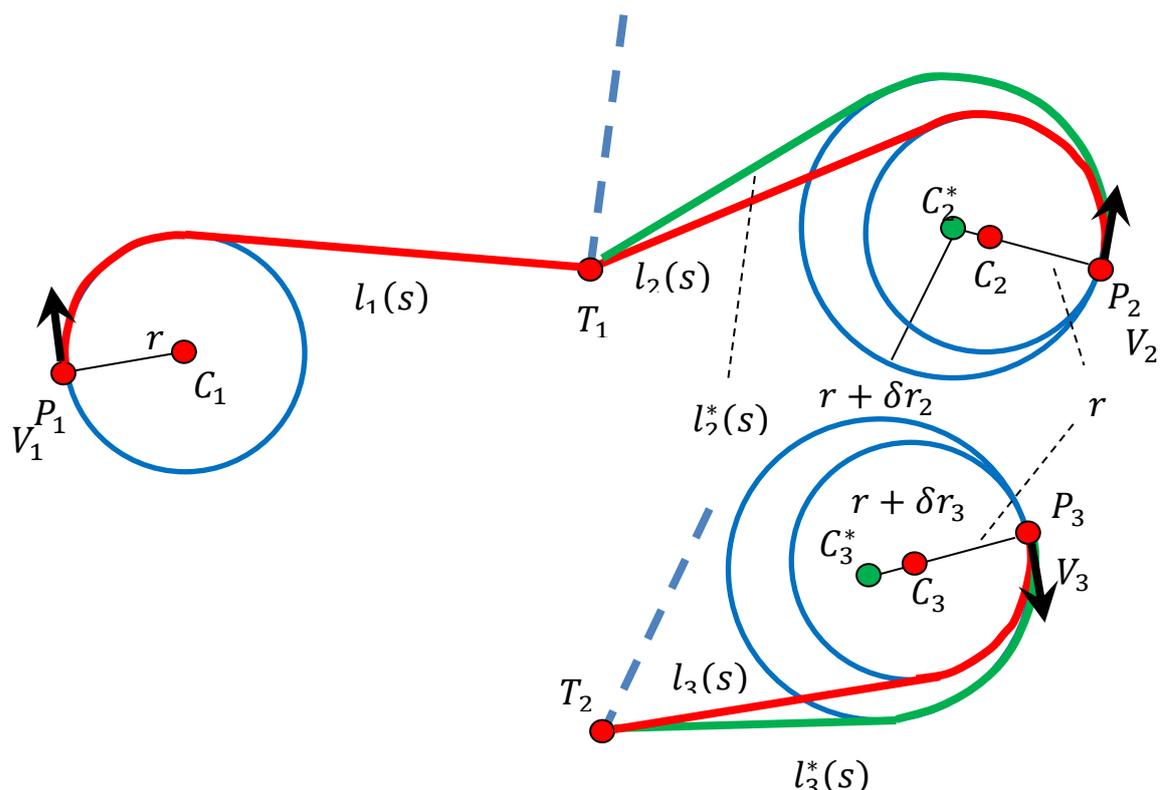


Рисунок 3.46 Групповое преследование множества целей

прогнозируемых траекторий параметризация производится от ее длины дуги.

При новом положении цели T_i линия $l_i(s)$ смещается, оставаясь параллельной самой себе (Рисунок 3.47).

Если i – *ый* преследователь в момент времени t_j находится в точке P_{ij} (Рисунок 3.48), имея при этом прогнозируемую траекторию движения

$l_{ij}(s)$, соединяющую с текущим положением цели T_{ij} , то следующая точка траектории преследователя будет точка P_{ij+1} .

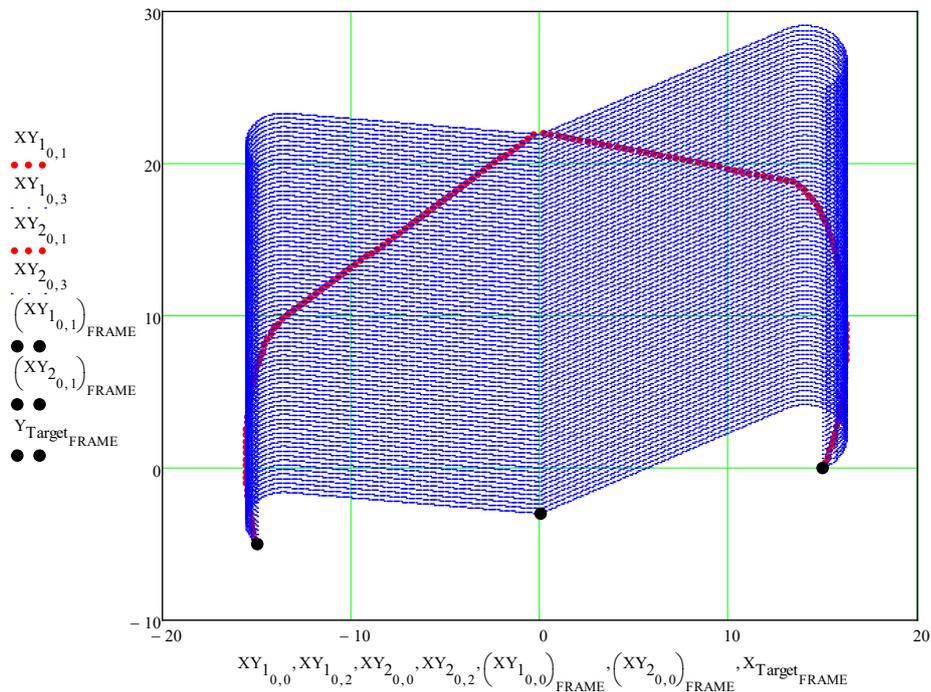


Рисунок 3.47 Однопараметрические сети прогнозируемых траекторий движения преследователей

Точка P_{ij+1} есть точка пересечения линии $l_{ij+1}(s)$, соответствующей положению цели T_{ij+1} в следующий момент времени t_{j+1} , и окружности с центром в точке P_{ij} и радиуса $|V_{ij}| \cdot \Delta t$, $\Delta t = t_{j+1} - t_j$. Такова модель построения траекторий преследователя.

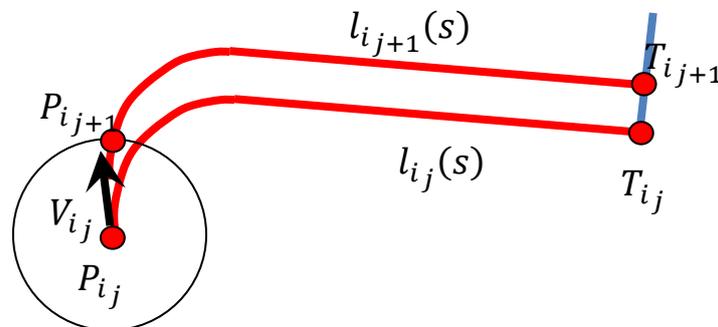


Рисунок 3.48 Итерационный процесс расчета траектории преследователя

Рассмотрим задачу группового преследования, когда группа преследователей догоняет группу целей. Будем считать, что каждый преследователь P_i стремится достичь своей цели T_i , хотя у некоторых преследователей цели могут совпадать, как показано на рисунках 3.46 и 3.47.

Причем преследователь P_i достигает цели T_i за определенное время t_i , двигаясь с определенной скоростью V_i . Для одновременного достижения целей необходимо равенство всех значений t_i определенному значению.

На рисунке 3.46 показано, что для изменения длины базовой линии можно изменять радиус касательной окружности. Касательная окружность была введена для того, чтобы преследователь мог плавно перейти на прямолинейную траекторию. Если бы это было так, то задача была бы сведена к преследованию методом параллельного сближения.

Поскольку начальная скорость преследователя направлена произвольно, то при помощи составной базовой линии, которая при движении цели перемещается, оставаясь параллельной сама себе, происходит плавный переход к методу параллельного сближения с соблюдением ограничений по кривизне (Рисунок 3.47).

По результатам работы программы создано анимированное изображение, где можно посмотреть плавный переход к параллельному сближению [83].

В главе описан метод, при котором преследователь достигает цели в назначенное время из допустимых значений. Как следствие, можно рассматривать одновременное достижение своих целей группой преследователей.

В этой программе реализован алгоритм, который использует итерационную схему расчета траектории преследователя, показанную на рисунке 2.47.

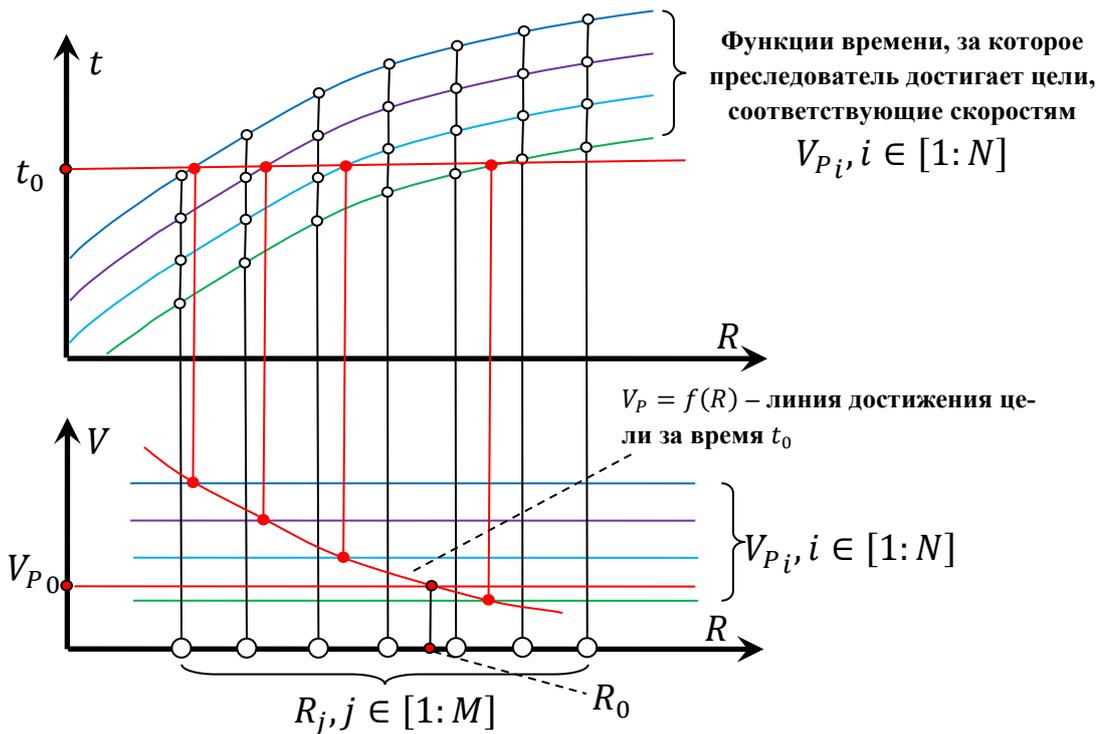


Рисунок 3.49 Определение радиуса окружности на эюре Монжа

В модели считается, что существует зависимость для преследователя P , который достигает своей цели T , за время t : $t = F(P_s, T_s, n_p, n_T, V_P, V_T, R)$, где P_s, T_s — координаты точек положения преследователя и цели в момент начала процесса преследования.

Векторы направления движения преследователя и цели n_p, n_T , считаются заданными в момент начала процесса преследования. Модули скоростей преследователя и цели V_P, V_T неизменны в процессе преследования.

R — радиус касательной окружности, смысл которой показан на рисунках 3.47 и 3.48. Фактически, в модели подсчитывается число шагов, за которые преследователь достигает цель. Число шагов, при известном дискретном промежутке времени, можно сопоставить со временем реальным.

Если цель движется прямолинейно и равномерно, то нашу зависимость времени достижения цели в уже начавшемся итерационном процессе можно считать функцией от двух переменных: $t = F(V_P, R)$, от модуля скорости преследователя и от радиуса кривизны окружности.

Хотя, в модели считается, что преследователь движется с постоянной скоростью V_P , но ничто не мешает нам изменять значения модуля скорости, как и радиуса кривизны. Допустим, что модуль скорости принимает дискретные значения из ряда $V_{P_i}, i \in [1:N]$, а радиус окружности из рисунков 3.46, 3.48 принимает значения $R_j, j \in [1:M]$.

Для дальнейших исследований применяется эпюр Радищева [77, 91, 92, 93], где используются координатные плоскости (R, V) и (R, t) (Рисунок 3.49).

На рисунке 3.49 показано экспериментальное построение временных зависимостей $t_{i,j} = F(V_{P_i}, R_j)$. На плоскости (R, t) схематически показаны графики зависимостей времен достижения цели преследователем от радиуса окружности R при фиксированном значении скорости V_P .

В качестве одного из оптимизирующих факторов [77, 91, 92, 93] на плоскости (R, t) выбирается равенство $t = t_0$, где t_0 — требуемое время достижения цели. Далее, на плоскости, для решения нашей задачи, на плоскости (R, V) в качестве второго оптимизирующего фактора выбирается равенство $V_P = V_{P_0}$, где V_{P_0} — это постоянная скорость преследователя.

Хотя, в постановке задачи говорится о том, что модуль скорости преследователя является неизменным, построенный ряд значений скоростей необходим для расчета радиуса окружности R_0 на плоскости проекций (R, V) .

По линиям связи на плоскости проекций (R, V) находятся соответствующие точки пересечения с линиями уровня скоростей V_{P_i} (Рисунок 3.49). По полученным точкам в тестовой программе выполняется полиномиальная регрессия и, в итоге, получаем функцию зависимости скорости преследователя от радиуса окружности, при которой происходит достижение цели за время t_0 .

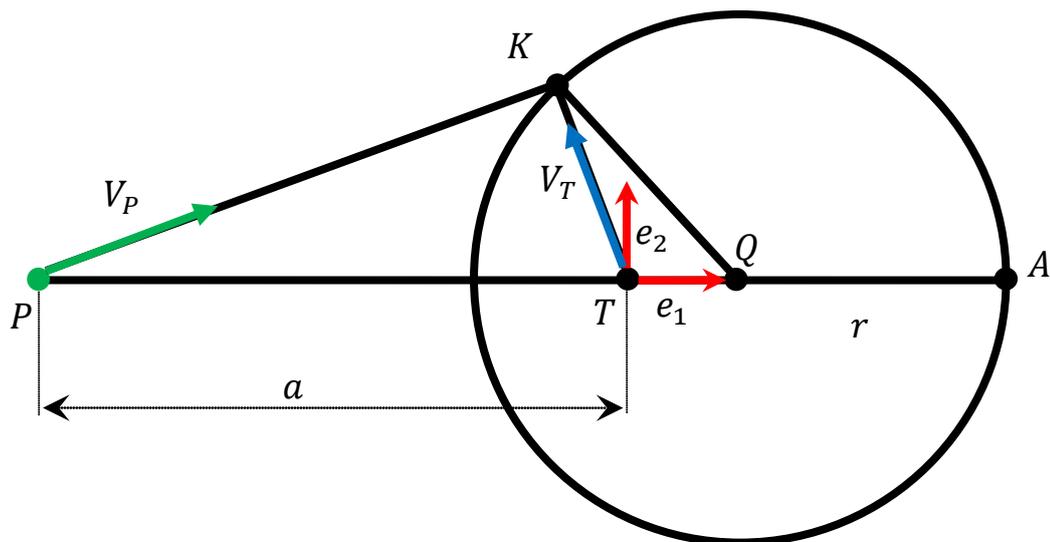


Рисунок 3.50 Окружность Аполлония

Затем ищется точка пересечения функции $V_P = f(R)$ (Рисунок 3.49) с линией уровня $V_P = V_{P_0}$. Абсцисса точки пересечения R_0 и есть искомый радиус окружности, чтобы достичь цели T преследователем P за время t_0 со скоростью V_{P_0} .

Расчет ведется при условии того, что цель движется равномерно и прямолинейно. Если цель изменяет направление или скорость, то для достижения ее рассчитывается новый радиус окружности составной базовой линии (аналог линии визирования метода параллельного сближения), ставится новое время достижения при прежней скорости преследователя.

Наименьшее время предел достижения цели при ее равномерном и прямолинейном движении будет, когда скорость преследователя направлена в точку K окружности Аполлония [12, 13].

По определению окружностью Аполлония называется геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух заданных точек — величина постоянная, не равная единице. На рисунке 3.50 это можно проиллюстрировать как: $|PK|/|TK| = |V_P|/|V_T|$.

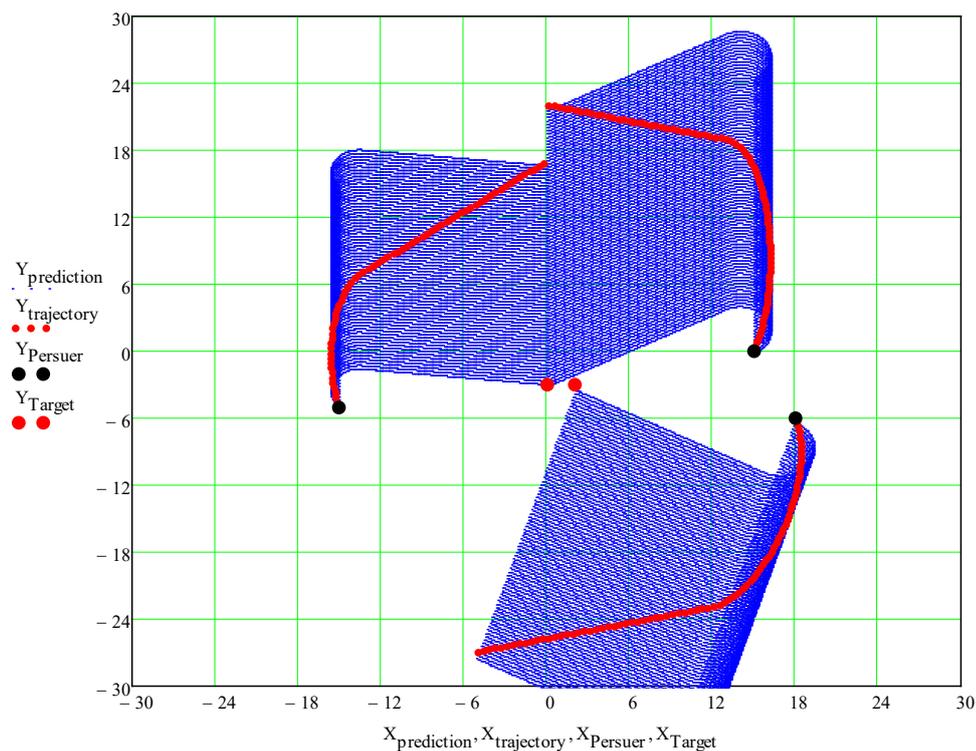


Рисунок 3.51 Достижение целей в различное назначенное время

При рассмотрении множественного преследования группы целей, то в тестовой программе производится предварительный расчет траекторий движения преследователей при заданных начальных параметрах. Из времен достижения целей для расчета одновременного достижения выбирается наибольшее время. И это время выбирается критерием для расчета траекторий остальных преследователей. Этот момент проиллюстрирован на рисунке 3.47. На рисунке 3.51 показано, как для одного из преследователей было установлено более короткое время достижения цели. Рисунок 3.51 также дополнен ссылкой [84] на анимированное изображение, где можно посмотреть достижение целей в различное назначенное время.

На рисунке 3.52 приведены некоторые результаты работы многофакторного анализа в задаче одновременного достижения цели двумя преследователями. Цель движется прямолинейно и равномерно. Для каждого преследователя построили ряд допустимых скоростей. Ряд допустимых значений радиуса

окружности варьируется при помощи дискретных переменных dR . На графиках рисунка 3.52 это шкала dR .

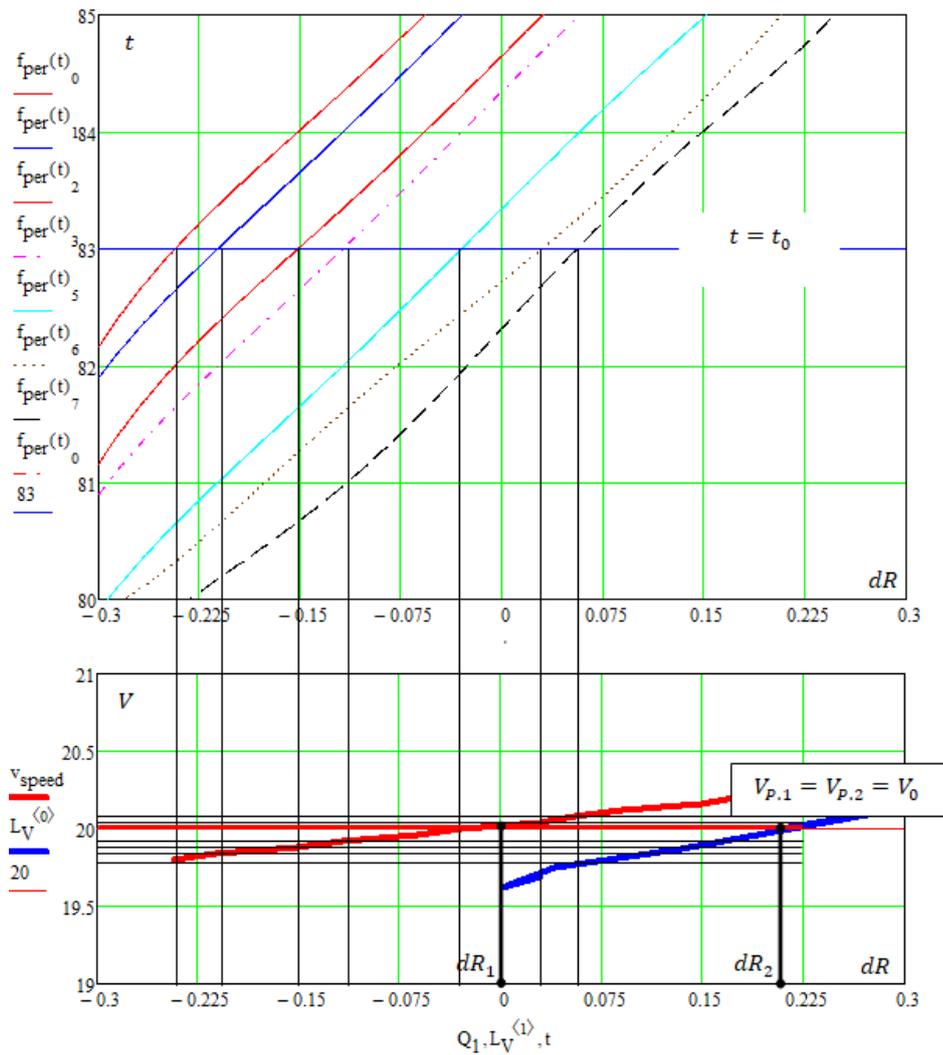


Рисунок 3.52 Результаты многофакторного анализа

На плоскости проекций (dR, t) строим однопараметрическую сеть линий. Каждая линия соответствует определенному значению скорости и выражает зависимость времени достижения цели от приращения радиуса окружности. На графике рисунка 3.52 показана однопараметрическая сеть линий скоростей одного из преследователей. Для второго в тестовой программе многофакторного анализа построена аналогичная сеть.

Для каждого преследователя выбирается первый оптимизирующий фактор [85], [86], [87], [88], отвечающий за одновременное достижение, $t = t_0$. Где t_0 — наибольшее из времен достижения цели, если бы преследователи независимо догоняли цель при таких же начальных условиях. На плоскости (dR, t) ищутся точки пересечения с линией уровня $t = t_0$ с линиями скоростей однопараметрической сети. Точки пересечения находятся при помощи встроенных процедур решения уравнений. В системе компьютерной математики MathCAD это может быть процедура *root*. Найденным точкам пересечения отвечают значения dR и V на плоскости проекций (dR, V) .

К полученным точкам на плоскости проекций применяется встроенная процедура полиномиальной регрессии и находится характеристическая кривая зависимости скорости от радиуса окружности составной базовой линии, которые приведены на рисунке 3.52.

На рисунке 3.52, на плоскости проекций (dR, V) изображена такая же характеристическая линия зависимости скорости и для другого преследователя. Далее, применяется второй оптимизирующий фактор $V_1 = V_2 = V_0$. В тестовой программе объекты движутся с одинаковыми скоростями. Встроенными средствами компьютерной математики ищутся точки пересечения с линией уровня $V = V_0$. Этим точкам соответствуют значения dR_1 и dR_2 .

При запуске итерационного процесса с заданным значением времени достижения цели t_0 , с заданными модулями скоростей движения V_0 , с найденными значениями приращений dR_1 и dR_2 к начальному радиусу окружности достигнуто одновременное достижение цели двумя преследователями. Этот факт продемонстрирован дополнением к рисунку 3.51.

Предложен метод достижения группой преследователей множества целей, в котором может назначаться время достижения. Одновременное достижение целей есть частный результат данного метода. Данный метод является развитием метода параллельного сближения. Если данный метод реализовать

в пространстве, то следует добиться того, чтобы векторы преследователя и цели находились в одной плоскости.

Если задача преследования происходит в трехмерном пространстве, и мы хотим свести ее к методу параллельного сближения, но скорость преследователя направлена произвольно, то базовую линию прогнозируемых траекторий движения преследователя следует строить в плоскости, образованной линией визирования и скоростью преследователя.

Следующий шаг преследователя будет точка пересечения сферы с радиусом равным шагу преследователя и базовой линии, параллельно перенесенной так, чтобы один ее конец совмещался с точкой положения цели.

Теперь к вопросу нахождения окружности Аполлония и точки K в трехмерном пространстве. Сама окружность будет находиться в плоскости, образованной линией визирования и скоростью цели. Параметры окружности Аполлония такие как центр окружности (т. Q), радиус окружности r , точка Аполлония (т. A), точка K определяются вектором скорости цели, модулем скорости преследователя, положениями преследователя и цели. Имеется аналитическое решение этой в плоской системе координат, показанной на рисунке 2.49. Центр координат находится в точке положения цели, вектор абсцисс будет единичным вектором вдоль линии визирования, соединяющей положения преследователя и цели, а вектор ординат будет перпендикулярным вектору абсцисс, но в плоскости, образованной линией визирования и вектором скорости цели.

Результаты исследований, могут быть востребованы разработчиками барражирующих беспилотных летательных аппаратов, которые выполняют групповые согласованные задачи. Роль оператора наведения может быть сведена к указанию целей и контролю над выполнением задач.

ВЫВОДЫ К ГЛАВЕ 3

Во второй главе были произведены исследования в области компьютерного моделирования задач преследования на плоскости, на поверхности и в пространстве.

Производилось моделирование методов параллельного сближения с различной интерпретацией стратегии и тактики достижения цели и уклонения от преследователя.

Также производилось моделирование метода погони на плоскости, используя методику следования однопараметрической сети прогнозируемых траекторий.

В задачах преследования, как методом параллельного сближения, так и методом погони, использовалась также методика корректировки направления движения, как преследователя, так и цели.

Производилось моделирование задачи группового преследования одиночной цели. Преследователи в процессе преследования имели различные задачи. Некоторые преследователи имели своей задачей достижение того, чтобы двигаться с целью параллельными курсами. Некоторые преследователи имеют своей задачей зайти в определенную точку под заданным углом. Точка определяется как продолжение предполагаемой траектории.

Также производилось моделирование процесса группового преследования множества целей. Задачей данной модели являлось достижение назначенных целей одновременно и в назначенные оператором значения времени.

Течение итерационного процесса определяется начальными положениями преследователей и целей, а также их векторами скоростей. И назначение каждому преследователю своей цели производилось автоматизировано, исходя из начального состояния.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современное состояние вычислительной техники и темпы развития робототехники, беспилотных летательных аппаратов уже требуют разработки моделей и алгоритмов, в которых участниками принимаются решения.

В этой связи очень актуальными являются задачи преследования, уклонения, группового преследования, уклонения от группы объектов.

В монографии получены следующие результаты:

1. Разработан подход к геометрическому моделированию траекторий участников задачи преследования, когда участники стремятся придерживаться сети прогнозируемых траекторий.
2. Разработан метод коррекции направления движения участников задачи преследования.
3. Разработана методика, когда группа преследователей достигает множество целей одновременно или в назначенные моменты времени.
4. Разработан многофакторный анализ задачи преследования с использованием многомерной начертательной геометрии.
5. Произведено моделирование траекторий движения преследующего и преследуемого объектов по поверхности, заданной точечным базисом
6. Произведено моделирование траектории движения преследующего объекта по геодезической линии.
7. Произведено моделирование траектории преследующего объекта с учетом опережения
8. Разработаны модели поведения преследующего и преследуемого объектов на пересеченной местности. Разработаны методы анализа фазовых координат оппонента по задаче преследования. Разработана методика принятия решения участником задачи преследования
9. Разработаны модели поведения объектов, участников задачи преследования, когда они находятся на разных поверхностях. Предложен метод

построения поверхности, когда объект преследования находится сверху над объектом преследования

10. Разработан алгоритм автоматизированного построения траекторий, предполагающих обход движущихся препятствий

11. Разработан алгоритм автоматизированного построения траекторий с заданными дифференциальными ограничениями

Проведенные исследования показали, что геометрическое моделирование, проводимое в процессе разработки робототехнических комплексов, оснащенных системами искусственного интеллекта для принятия решений, является необходимой частью для прогнозирования результатов квазидискретных задач преследования.

Компьютерное моделирование дает широкие возможности для прогнозирования результатов разнообразных игр преследования, как непрерывных, так и квазидискретных.

Так же и визуализация процессов преследования, убегания, уклонения и т.д. оказывает огромную помощь в работе разработчика.

Теоретические результаты исследования, методы и алгоритмы геометрического моделирования целесообразно использовать при разработке робототехнических комплексов, оснащенных системами искусственного интеллекта, которые в своей работе выполняют различные задачи преследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры/ Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. — М.: Физматлит, 1974. — 456 с.
2. Петросян, Л.А. Дифференциальные игры преследования/ Л.А. Петросян. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. — 222 с.
3. Пацко, В.С. Игра «шофер-убийца» и ее модификации/ В.С. Пацко, В.Л. Турова // Вестник Удмуртского университета, Математика. — 2008. — Вып. 2. — С. 105-110.
4. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. — М.: Мир, 1967. — 480 с.
5. Merz, A.W. The game of two identical cars/ A.W. Merz // Journal of optimization and application. — 1972. — 9 (5) — P. 324-343.
6. Breakwell, J. V. Toward a complete solution of the homicidal chateur game/ J. V. Breakwell, A.W. Merz// Proc. of the 1st Int. Conf. on the Theory and Application of Dierential Games. Amherst, Massachusetts — 1969. — P. III-1 — III-5.
7. Merz, A. W. The homicidal chauffeur — a differential game / A. W. Merz // PhD thesis. Stanford University — 1971.
8. Lewin, J. Decoy in pursuit-evasion games/ J. Lewin// PhD Thesis. Stanford University — 1973.
9. Lewin, J. The surveillance-evasion game of degree/ J. Lewin, J. V. Breakwell// J. Opt. Theory Appl. — 1975. — 16 (34) — P. 339-353.
10. Lewin, J. Conic surveillance evasion/ J. Lewin, G. J. Olsder// J. Opt. Theory Appl. — 1979. — 27 (1) — P. 107-125.
11. Cardaliaguet P. Numerical methods for optimal control and dierential games/ P. Cardaliaguet, M. Quincampoix, P. Saint-Pierre// Ceremade CNRS URA 749 — 1995.

12. Cardaliaguet P. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games / P. Cardaliaguet, M. Quincampoix, P. Saint-Pierre// Theory and Numerical Methods — Springer: Berlin — 1999. — P. 177-247.
13. Dubins, L. E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents/ L. E. Dubins// Amer. J. Math. — 1957. — 79 — P. 497-516.
14. Reeds, J. A. Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards/ J. A. Reeds, L. A. Shepp// Pacif J. Math. — 1990. — 145 (2) — P. 367-393.
15. Бердышев, Ю.И. Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса/ Ю.И. Бердышев// Тр. ИММ УрО РАН — 2016. — 22 (1) — С. 26-35.
16. Понтрягин, Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении/ М.: Наука, 1989. — 64 с.
17. Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования/ Р. Беллман, С. Дрейфус. — М.: Наука, 1965. — 460 с.
18. Кан, В. Л. Теория пропорциональной навигации/ В.Л. Кан, А.С. Кельзон. — Ленинград: Судостроение, 1965. — 423 с.
19. Созинов, П.А. Кинематический анализ методов пропорциональной навигации применительно к наведению зенитной управляемой ракеты на баллистическую цель/ П.А. Созинов, Б. Н. Горевич // Вестник концерна ВКО «Алмаз — Антей» — 2022. — 2 — С. 74-92.
20. Кринецкий, Е.И. Системы самонаведения/ Е.И. Кринецкий. — М.: Машиностроение, 1970. — 236 с.
21. Мизрохи, В. Я. Проектирование управления зенитных ракет/ В.Я. Мизрохи. — М.: «Экслибрис — Пресс», 2010. — 252 с.
22. Zarchan, P. Tactical and Strategic Missile Guidance/ P. Zarchan. — American Institute of Aeronautic and Astronautic, 2012. — 1095 p.
23. Голубев, И.С., Светлов, В.Г. Проектирование зенитных управляемых ракет/ И.И. Архангельский, П.П. Афанасьев, Е.Г. Болотов, И.С. Голубев,

- А.М. Матвеев, В.Я. Мизрохи, В.Н. Новиков, С.Н. Остапенко, В.Г. Светлов. — М.: Изд-во МАИ, 2001. — 732 с.
24. Ненартович, Н.Э. BDMS — система противоракетной обороны США. Анализ и моделирование/ Н.Э. Ненартович, Б.Н. Горевич. — М.: ПАО «НПО «Алмаз», 2020. — 351 с.
 25. Паньков, С.Я. Теория и методика управления авиацией: учеб. Пособие. В 2 ч./ С.Я. Паньков, Ю.Е. Забураев, А.М. Матвеев. — Ульяновск: УВАУ ГА, 2006. — 371 с.
 26. Ленов, Н.. Зенитные ракетные комплексы ВВС стран НАТО/ Н. Ленов, В. Викторов// Зарубежное военное обозрение. — М.: «Красная Звезда», 1975. —2. — С. 61—66.
 27. Демидов В. Совершенствование систем ЗУРО в капиталистических странах/ В. Демидов, Н. Кутыев// Зарубежное военное обозрение. — М.: «Красная Звезда», 1975. — № 5. — С. 52—57.
 28. Дубинкин, Е. Разработка и производство зенитного вооружения Армии США/ Е. Дубинкин, С. Прядилов// Зарубежное военное обозрение. — М.: «Красная Звезда», 1983. — № 3. — С. 30—34.
 29. Абрамянц, Т.Г. Уклонение подвижных объектов от обнаружения на плоскости и в пространстве/ Т.Г. Абрамянц, Е.П. Маслов, В.П. Яхно// Проблемы управления. — 2008. — № 3. — С. 2-13.
 30. Галяев, А.А. Уклонение подвижного объекта от одиночного обнаружителя на заданной скорости/ А.А. Галяев, П.В. Лысенко, В.П. Яхно// Проблемы управления. — 2020. — № 1. — С. 83-91.
 31. Галяев А.А. Задача уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде/ А.А. Галяев// Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 6. — С. 28—37. [Galyaev, A.A. Evasion on Plane from a Single Mobile Observer in the Conflict Environment // Automation and Remote Control. — 2014. — Vol. 75, no. 6. — P. 1017—1024.]

32. Андреев К.В., Рубинович Е.Я. Траекторное управление наблюдателем/ К.В. Андреев, Е.Я. Рубинович // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 1. — С. 134—162. [Andreev, K.V., Rubinovich, E.Ya. // Moving observer trajectory control by angular measurements in tracking problem // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77, no. 1. — P. 106—129.]
33. Shevchenko, I.I. Successive Pursuit with a Bounded Detection / I.I. Shevchenko// Journal of Opt. Theory and Appl. — 1997. — Vol. 95. — N 1. — P. 25—48.
34. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=C7imOTjEgQQ> (дата обращения: 9.07.2022)
35. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=0-qA8Q2fcwE> (дата обращения: 9.07.2022)
36. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/arCQYrLZGxk> (дата обращения: 9.07.2022)
37. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/dBGalSwRclg> (дата обращения: 9.07.2022)
38. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=lvHvKzEjU4U>
39. Хачумов, М.В. Управление группой беспилотных летательных аппаратов, основанное на производственных правилах/ М.В. Хачумов// 4-ая Научно-Практическая Internet-конференция, Междисциплинарные исследования в области математического моделирования и информатики. — 2014 — С. 249-254.
40. Хачумов, М.В. Задачи группового преследования цели в условиях возмущений/ М.В. Хачумов// Искусственный интеллект и принятие решений. — 2015 — № 2 — С. 45-52.

41. Петров, Н.Н. К задаче группового преследования/ Н.Н. Петров// Известия Института Математики и Информатики. Ижевск. — 2002 — Т. 2 (25) — С. 73-74.
42. Пшеничный, Б.Н. Простое преследование несколькими объектами/ Б.Н. Пшеничный// Кибернетика. — 1976 — №3 — С. 145–146.
43. Пшеничный, Б.Н. Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх/ Б.Н. Пшеничный, А.А. Чикрий// Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1974 — Т. 14. №6 — С. 416–427.
44. Саматов, Б.Т., Задача преследования–убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управления преследователя/ Б.Т. Саматов// Автоматика и телемеханика. — 2013 — № 7 — С.17–28.
45. Маматов, М.Ш. Игровая задача преследования и убегания с управлением, заданным разностными уравнениями второго порядка/ М.Ш. Маматов// Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2006 — Т. 3(36) — С. 95-96.
46. Банников, А.С., Некоторые нестационарные задачи группового преследования / А.С. Банников// Известия Института математики и информатики УдГУ. — 2013 — Вып. 1 (41) — С.3-46.
47. Банников, А.С. Нестационарная задача группового преследования/ А.С. Банников//Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. — 2006 — Т. 34 — С. 26–28.
48. Банников, А.С. Нестационарная задача группового преследования/ А.С. Банников// Проблемы теоретической и прикладной математики, тр. 39-й Всерос. молодеж. конф., 28 янв.–1 фев., 2008 , г. Екатеринбург: УрО РАН — 2008 — С. 221–223.
49. Измestьев, И.В. Задача преследования маломаневренных объектов с терминальным множеством в форме кольца/ И.В. Измestьев, В. И. Ухоботов // ВИНТИ РАН, Москва. — 2018. С.25–31

50. Благодатских, А.И. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов/ А.И. Благодатских, Н.Н. Петров // Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та. — 2009. — 266 с.
51. Понтрягин, Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания / Л.С. Понтрягин //Тр. МИАН СССР. — 1971. — Т. 112. — С. 30—63.
52. Понтрягии, Л. С. К теории дифференциальных игр/ Л. С. Понтрягии// Успехи математических наук. — 1966 — т. XXI, вып. 4 — С. 219-274.
53. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко//М.: Наука — 1983 — С.392.
54. Понтрягин, Л.С. Задача об убегании одного управляемого объекта от другого / Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко//ДАН СССР — 1969 — Т. 189. №4 — С. 721–723.
55. Понтрягин, Л.С. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх/ Л.С. Понтрягин, Е.Ф. Мищенко// Дифференциальные уравнения . — 1971 — Т. 7. №3 — С. 436–445.
56. Малофеев, О.А. Игра простого преследования на плоскости с препятствием / О.А. Малофеев, Л.А. Петросян// Сб. трудов ин-та математики Сиб. отд. АН СССР — 1971 — Вып. 9 — С. 31–42.
57. Fleming, W.H. The convergence problem for differential games / W.H. Fleming // J. Math. Ann. and Appl — 1961 — № 3 — P.102-116.
58. Fleming, W.H. A note on differential games of prescribed durations, Contribution to the theory of games / W.H. Fleming// Ann. Of Math. Studies — 1957 — № 3 — P.407-412.
59. Ашкенази, В.О. Применение теории игр в военном деле / В.О. Ашкенази // Сборник переводов с английского под редакцией Ашкенази В.О. — Издательство «Советское Радио», М. , 1961. — С. 362.
60. Партхасаратхи, Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц/ Т. Партхасаратхи, Т. Рагхаван. — М.: Мир. — 1974.- С.296

61. Азамов, А. Структура дискретных игр преследования и убегания/ А. Азамов // Известия АН РУз, серия физ.- мат. Наук. — 1984 — №2 — С. 3–8
62. Бурдаков, С.В. Алгоритмы управлением движения мобильным роботом в задаче преследования/ С.В. Бурдаков, П.А. Сизов// Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. — 2014 — № 6 (210) — С. 49-58.
63. Canudas de Wit, C. Theory of Robot Control/ C. Canudas de Wit, B. Siciliano, G. Bastin // London: Springer — Verlag — 199 — P.392.
64. Marcos, A. M. Vieira. Scalable and Practical Pursuit-Evasion with Networked Robots A. M. Marcos, Govindan Ramesh, S. Gaurav Sukhatme// Journal of Intelligent Service Robotics. Special Issue on Networked Robots. — 2009. — N 2. — P. 247–263.
65. Чикрий, А.А. Конфликтно управляемые процессы/ А.А. Чикрий — Киев: Наук. Думка — 1992 — С.384
66. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простыми движениями/ Б.Б. Рихсиев — Ташкент: ФАН — 1989 — 232 с.
67. Petrosjan, Leon A. Differential Games of Pursuit/ Leon A. Petrosjan — World Scientific Publishing Company — 1993 — P. 340 (ISBN 978-9810209797)
68. Petrosyan, L. A. Subgame-consistent Economic Optimization/ L. A. Petrosyan, D. W. K. Yeung — Springer — 2012 — P. 396
69. Petrosjan, Leon A. Game Theory/ Leon A. Petrosjan, N. A. Zenkevich — World Scientific Publisher — 1996 — P.350
70. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=rsMGA1ICo7M> (дата обращения: 9.07.2022)
71. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=hGieKXNiuz8> (дата обращения: 9.07.2022)

72. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=qNXdykK21Z8> (дата обращения: 9.07.2022)
73. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=06qgINE4j8U> (дата обращения: 9.07.2022)
74. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=xszwIyTHUec> (дата обращения: 9.07.2022)
75. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/JIUmh6DTrA4> (дата обращения: 9.07.2022)
76. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=UQ5bVKjVqZ4> (дата обращения: 9.07.2022)
77. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/aC4PuXTgVS0> (дата обращения: 9.07.2022)
78. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/sLy7Jvppf4A> (дата обращения: 9.07.2022)
79. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/WqsFkD2XwIw> (дата обращения: 9.07.2022)
80. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/NNJDJOJT34I> (дата обращения: 9.07.2022)
81. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=tdbgoNoby3A> (дата обращения: 9.07.2022)
82. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/8nDUSi3ENB4> (дата обращения: 9.07.2022)

83. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=7VNHNwCbWrg> (дата обращения: 9.07.2022)
84. Видео, результаты моделирования задачи преследования. URL: <https://youtu.be/F6MTsWZL2BY> (дата обращения: 9.07.2022)
85. Волков, В. Я. Графические оптимизационные модели многофакторных процессов / В. Я. Волков, М.А. Чижик — Монография, г. Омск, Издательско-полиграфический центр ОГИС, 644099, Омск, ул. Красногвардейская, 9 — 2009 — С. 101
86. Болотов, В. П. Многомерная геометрия: моногр. / В. П. Болотов. — Владивосток, МГУ им. адм. Г. И. Невельского — 2004 — С.256
87. Филиппов, П. В. Начертательная геометрия многомерного пространства и её приложения / П. В. Филиппов — Л.: Изд-во ЛГУ — 1979 — 280 с.
88. Радищев, В. П. О применении геометрии четырёх измерений к построению равновесных физико-химических диаграмм / В. П. Радищев — Изв. СФХА. — М. — 1947 — Т. 15 — С. 129–134