

# Выпучивание вращающихся стержней при действии осевых сжимающих сил с учетом собственного веса

УДК 621.893

## Языев С.Б.

Канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры «Техническая механика», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону); e-mail: serdariaziev@gmail.com

## Коноплев Ю.Г.

Д-р техн. наук, профессор, профессор-консультант, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (г. Казань); e-mail: yori.konoplev@ksu.ru

## Языева С.Б.

Канд. техн. наук, профессор, профессор кафедры «Строительство уникальных зданий и сооружений», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону); e-mail: iskra1917@bk.ru

## Ахтямова Л.Ш.

Аспирант кафедры «Соппротивление материалов», ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону); e-mail: Sabitov-kgasu@mail.ru

Статья получена: 20.08.2020. Рассмотрена: 03.09.2020. Одобрена: 29.09.2020. Опубликовано онлайн: 30.09.2020. ©РИОР

**Аннотация. Введение.** Статья посвящена решению задач выпучивания вращающихся стержней, подверженных действию сжимающих сосредоточенных сил с учетом равномерно распределенной нагрузки вдоль оси.

В таком режиме работают, например, буровращающиеся валы.

Целью данной статьи является разработка инженерного метода расчета стержней (бурильных труб), апробированных схем и обоснование

## BUCKLING OF ROTATING RODS UNDER THE ACTION OF AXIAL COMPRESSIVE FORCES TAKING INTO ACCOUNT THEIR OWN WEIGHT

### Yazyev S.B.

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department "Technical Mechanics", Don State Technical University, Rostov-on-Don; e-mail: serdariaziev@gmail.com

### Konoplev Yu.G.

Doctor of Technical Sciences, Professor, Consulting Professor, Institute of Mathematics and Mechanics named after N.I. Lobachevskiy, Kazan Federal University, Kazan; e-mail: yori.konoplev@ksu.ru

### Yazyeva S.B.

Candidate of Technical Sciences, Professor, Department "Technical Mechanics", Don State Technical University, Rostov-on-Don; e-mail: serdariaziev@gmail.com

### Akhtyamova L.Sh.

Postgraduate Student, Department "Strength of Materials", Don State Technical University, Rostov-on-Don; e-mail: sabitov-kgasu@mail.ru

**Manuscript received:** 20.08.2020. **Revised:** 03.09.2020. **Accepted:** 29.09.2020. **Published online:** 30.09.2020. ©РИОР

**Abstract. Introduction.** The article is devoted to the conclusion of resolving equations for solving the tasks of bulging rotating rods subject to the action of compressive co-centric forces taking into account uniformly distributed load along the axis.

In this mode, for example, fast-moving shafts operate.

The purpose of this article is to provide an engineer with a method for calculating drill pipes, tested diagrams and justification of conditions in rotary drilling.

**Materials and Methods.** The new mathematical models describing stability of rods taking into account own weight and new software are proposed. Numerical simulation of load intensity distributions in the rod along the axis was carried out, at the same time different types of boundary conditions of rod fixation are used.

**Results.** Mathematical models and software for numerical simulation of stability of rotating rods under action of axial compressive forces have been improved.

Note that the effect of torsion moment in the present case may not be considered as insignificant in comparison with the above loads. A new method of calculating stability of rotating rods, allowing to take into account any boundary conditions and taking into account own weight, has been developed and scientifically justified.

There are proposed mathematical expressions convenient for practical use, which give very accurate results.

**Discussion and Conclusions.** Obtained results can be used in evaluation and diagnostics of state of samples of structural materials, in process of experimental investigations and in investigation of fast-flowing rotating processes in rod structures of variable stiffness, made of anisotropic composite materials in machine-building, shipbuilding, aircraft engineering, instrument-making, power engineering, etc.

**Keywords:** rotating rod, differential equations, greatest deflection, long modulus of elasticity, boundary conditions, frequency of transverse oscillations.

условий при роторном бурении с учетом собственного веса и различных граничных условий.

**Материалы и методы.** Предложены новые математические модели, описывающие устойчивость стержней с учетом собственного веса, и новый алгоритм для программного обеспечения. Проведено численное моделирование упругого равновесия стержня с учетом распределения интенсивности нагрузки в стержне вдоль оси. При этом рассмотрены различные виды закрепления стержня (граничных условий).

**Результаты исследования.** Усовершенствованы математические модели и программное обеспечение для численного моделирования устойчивости вращающихся стержней при действии осевых сжимающих сил с учетом и без собственного веса.

Отметим, что влияние крутящего момента в исследуемом случае можно не рассматривать, как незначительное в сравнении с указанными выше нагрузками.

Разработан и научно обоснован новый метод расчета на устойчивость вращающихся стержней, позволяющий учитывать любые граничные условия и действие собственного веса.

Предложены удобные для практического использования математические выражения, которые дают весьма точные результаты.

**Обсуждение и заключения.** Полученные результаты могут быть использованы в оценке и диагностике состояния образцов конструкционных материалов, процессе проведении экспериментальных исследований и в анализе быстропротекающих вращающихся процессов в стержневых конструкциях переменной жесткости, выполненных из анизотропных композиционных материалов в машиностроении, судостроении, авиастроении, приборостроении, энергетике и т.д.

**Ключевые слова:** вращающейся стержень, дифференциальные уравнения, наибольший прогиб, длительный модуль упругости, граничные условия, частота поперечных колебаний.

**Финансирование:**

Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

**Введение.** Известно, что при бурении скважин на очень больших глубинах, когда вращающийся момент подводится к верхнему концу колонны, а усилие на конце создается силой его тяжести,

бесперебойная работа системы может дать сбой в связи с возникновением ряда механических явлений. Это может быть потеря устойчивости колонны в нижней ее части по типу сжато-изогнутого закрученного стержня или возбуждение изгибных колебаний и т.д. При теоретическом моделировании статического или еще сложнее, динамического поведения стержня в упомянутом выше процессе возникает необходимость интегрирования дифференциальных уравнений их равновесия и колебаний. Эти задачи сопряжены со значительными аналитическими и вычислительными трудностями. Они возникают на начальной стадии их постановки и обусловлены сложной комбинацией статических и динамических силовых факторов.

В диссертации на степень адъюнкта прикладной механики в 1907 г. профессор С.П. Тимошенко решил задачу о выпучивании вращающихся валов, сжатых осевой силой. Для классического закрепления стержня «шарнир-шарнир» им было получено соотношение для определения критической силы и, как частный случай, уравнение, которое дает возможность определить критическую угловую скорость. Отметим, что упомянутое уравнение для этого частного случая вывел академик А.Н. Крылов.

Спустя 15 лет профессор Л.С. Лейбензон [1] приводит задачу, где рассматривается равномерное вращение консольного стержня в условиях растягивающей осевой силы и с учетом собственного веса. Автор использовал приближенный метод для решения поставленной задачи определения критической угловой скорости. Решение в квадратурах получено С.И. Шищенко и Р.И. Шищенко, где они приводят формулу для определения критической угловой скорости без учета собственного веса.

В своих научных трудах профессор А.Н. Динник [2; 3] также исследовал влияние равномерного вращения стержня на величину критического момента с помощью приближенного метода.

В середине прошлого века Л.Е. Симонянц [4], используя приближенный метод, исследовал уравнение линии упругости вертикально расположенного вращающегося стержня с различными формами равновесия.

А. Линеvский в работе [5], используя приближенный метод, получил формулу для опре-

деления критической угловой скорости колонны при осевом сжатии с учетом ее собственного веса.

Изучая вращение консольного стержня, получил формулу для определения критической угловой скорости и профессор Я.Г. Пановко. Им же данная проблема также решается и для вращающейся бурильной колонны в работе [6].

Э.М Любовин в своих трудах приводит решение для критических скоростей вращения колонн бурильных труб.

Обобщение всех перечисленных работ можно встретить в трудах профессора В.И. Гуляева [7–11].

В настоящее время можно привести работы Т.А. Боднар [12], Я. Вэньче [13], Р.А. Сабирова [14], Чжао Цзе [15] и ряд других зарубежных авторов [16–26], которые развивают известные методы решения задач устойчивости вращающихся стержней.

Сделав такой краткий обзор, считаем, что в общем случае для различных граничных условий при действии сжимающих осевых сил с учетом собственного веса исследований проведено достаточно много, но чаще всего решения представлены с очень громоздкими выкладками, что затрудняет их использование на практике рядовыми инженерами. Представленная статья посвящена совершенствованию метода расчетов на устойчивость вращающихся стержней и приведению решения к удобной для практического применения форме.

**Материалы и методы.** Рассмотрим вначале вращающиеся стержни без учета собственного веса. Стержень (рис. 1) вращается вокруг своей оси с заданной угловой скоростью  $\omega$ .

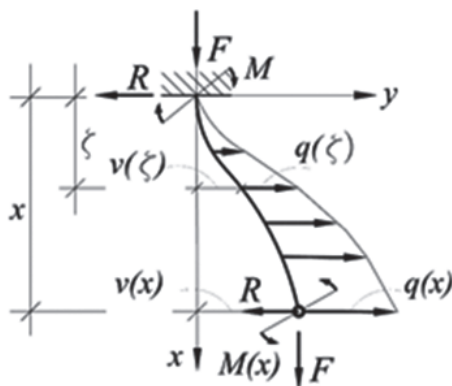


Рис. 1. Расчетный узел вращающегося стержня  
Fig. 1. The design node of the rotating rod

Рассмотрим элемент стержня длиной  $ds$  (рис. 2).

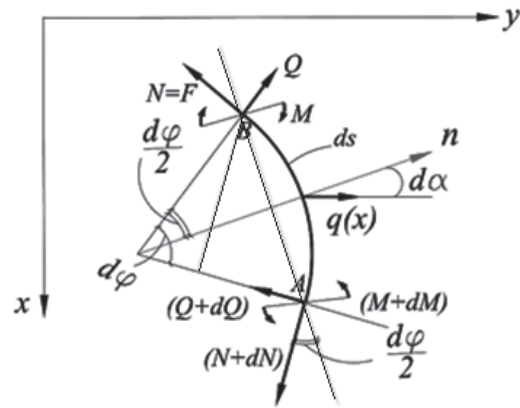


Рис. 2. Элемент стержня длиной  $ds$   
Fig. 2. Rod element of long  $ds$

Проектируя внутренние усилия и внешнюю нагрузку на нормаль к упругой линии, получим уравнение равновесия:

$$\sum F_n = 0; Q \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - (Q + dQ) \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - N \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - (N + dN) \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + q(x) ds \cos(d\alpha) = 0. \quad (1)$$

В случае малости угла  $\frac{d\varphi}{2}$  и длины рассматриваемого элемента  $ds$ , можно принять:

$$\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \cong \frac{d\varphi}{2}; \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \cong 1; \cos d\alpha \cong 1; ds \cong dx; rd\varphi = ds = dx;$$

$$N = F; q(x) = \frac{q\omega^2}{g} v(x); M(x) = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2},$$

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{dx} = EI_z \frac{d^4 v}{dx^4}; \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2 v}{dx^2}.$$

Откуда

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} = EI_z \frac{d^4 v}{dx^4}.$$

С учетом (2) выражение (1) перепишем в следующем виде:

$$-dQ - 2N \left( \frac{d\varphi}{2} \right) - dN \left( \frac{d\varphi}{2} \right) + q(x) dx = 0.$$

Разделим последнее выражение на  $dx$  и, пренебрегая произведением дифференциалов, получаем:

$$\frac{dQ}{dx} + F \frac{d\varphi}{dx} + q(x) = 0.$$

Заменив первое и второе слагаемое из (2), получим однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{F}{EI_z} \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{q\omega^2}{gEI_z} v(x) = 0. \quad (3)$$

Далее удобно рассматривать разрешающие уравнения в безразмерных величинах. Сделаем следующую замену:

$$x = \xi_l; \quad \zeta = l\psi; \quad (4)$$

Область определения новой переменной: при  $x = 0; \xi = 0$ , а при  $x = l; \xi = 1$ , следовательно  $0 \leq \xi \leq 1$ .

Используя переход к безразмерным величинам в (3), получим:

$$\frac{d^4 v}{d\xi^4} + \alpha^2 \frac{d^2 v}{d\xi^2} - \gamma^4 v(\xi) = 0, \quad (5)$$

где

$$\gamma^4 = \frac{q\omega^2 l^4}{gEI_z}; \quad \alpha^2 = \frac{Fl^2}{EI_z}. \quad (6)$$

Решение данного дифференциального уравнения известно:

$$v(\xi) = c_1 \sin \alpha_1 \xi + c_2 \cos \alpha_1 \xi + c_3 \operatorname{sh} \alpha_2 \xi + c_4 \operatorname{ch} \alpha_2 \xi, \quad (7)$$

где

$$\alpha_{1,2}^2 = \pm \frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \gamma^4}. \quad (8)$$

В классическом варианте закрепления стержня «шарнир–шарнир» решение получено С.П. Тимошенко в виде:

$$F + \frac{q\omega^2 l^4}{g\pi^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}.$$

Как и ранее, рассмотрим прямолинейный, вертикально расположенный и вращающийся стержень. В данном варианте будем учитывать *собственный вес*.

На практике аналогичные условия встречаются для быстро вращающихся валов. И в этом случае указанные силы — это доминирующий фактор, и влиянием крутящего момента можно пренебречь [7; 12; 17]. При малых отклонениях от прямолинейной формы дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид (8).

$$\pm \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}. \quad (9)$$

Изгибающий момент (рис. 3)

$$M(x) = -q \int_0^x \zeta \frac{dv}{d\zeta} d\zeta + \int_0^x \int_0^z \frac{q\omega^2}{g} v(\zeta) d\zeta dz - Rx + M, \quad (10)$$

откуда

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \int_0^x \frac{q}{EI_z} \zeta \frac{dv}{d\zeta} d\zeta - \int_0^x \int_0^z \frac{q\omega^2}{gEI_z} v(\zeta) d\zeta dz = \frac{M}{EI_z} - \frac{Rx}{EI_z}. \quad (11)$$

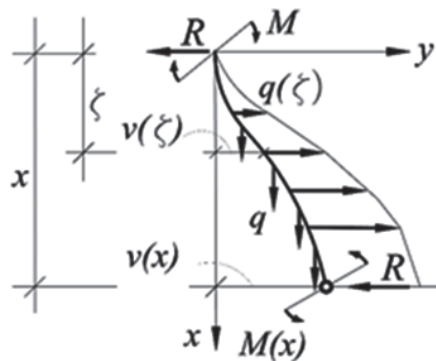


Рис. 3. Расчетный узел вращающегося стержня с учетом собственного веса  
Fig. 3. The design node of the rotating rod, taking into account its own weight

Далее удобно рассматривать разрешающие уравнения в безразмерных величинах. Тогда

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \psi \frac{dv}{d\psi} d\psi - \int_0^\xi \int_0^z \frac{q\omega^2}{gEI_z} \gamma^4 v(\psi) d\psi dz = \quad (12)$$

$$= m - r\xi,$$

где

$$\beta^3 = \frac{ql^3}{EI_z}; \quad m = \frac{MI}{EI_z}; \quad r = \frac{RI^2}{EI_z}; \quad \gamma^4 = \frac{q\omega^2 l^4}{gEI_z}. \quad (13)$$

Решение (12) будем искать в виде степенного ряда:

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^n A_k \xi^k. \quad (14)$$

Определив первые и вторые производные, подставим в (12) и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 0;$$

$$A_2 = \frac{m}{2}; \quad (15)$$

$$A_3 = -\frac{r}{6}. \quad (16)$$

Запишем для  $k = 4, 5, 6, 7, \dots \dots n$

$$A_k = \frac{1}{k(k-1)} \left[ -\beta^3 A_{k-3} + \frac{\gamma^4}{(k-3)} A_{k-4} \right]; \quad (17)$$

$$k = 4, 5, 6, 7, \dots \dots n.$$

Окончательное решение уравнения (12) с учетом найденных коэффициентов принимает вид:

$$v(\xi) = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \sum_{k=4}^n A_k \xi^k. \quad (18)$$

## Результаты исследования

**Задача 1.** Вариант закрепления «Зашемление–шарнир» без учета собственного веса.

Рассмотрим стержень, у которого верхний конец зашемлен, а нижний конец — шарнирный (рис. 7, б). Интенсивность вертикальной распределенной нагрузки равна нулю.

Граничные условия для определения четырех постоянных интегрирования имеют вид:

$$\text{при } x = 0, \xi = 0, v(0) = 0, \frac{dv}{d\xi}(0) = 0; \quad x = 1,$$

$$\xi = 1, v(1) = 0 \text{ и } \frac{d^2 v}{d\xi^2}(1) = 0.$$

Определитель этих четырех уравнений приравняем нулю и получим трансцендентное уравнение:

$$F_{kp} = \frac{20,19 EI_z}{l^2}, \quad (19)$$

Уравнение (19) позволяет построить зависимость между  $\alpha$  и  $\gamma$ . При  $\gamma = 0$  с учетом (6) из трансцендентного уравнения получим неопределенность и, раскрыв ее, получим:

$$\text{tg } \alpha - \alpha = 0. \quad (20)$$

Из последнего соотношения следует  $\alpha = 4,493407$ , т.е. с учетом (6) получим формулу Ясинского

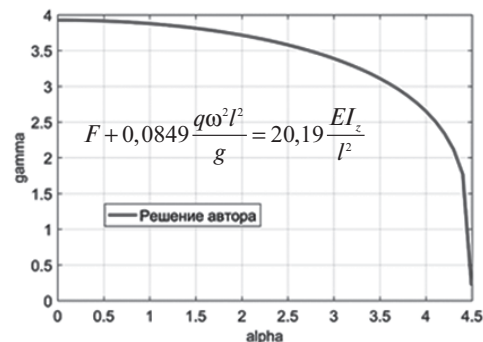
$$F_{kp} = \frac{20,19 EI_z}{l^2},$$

а при  $\alpha = 0$  и  $\gamma = 3,926601$  получим формулу:

$$\omega = \frac{15,42}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}. \quad (21)$$

Для инженерных расчетов соотношение (19) не совсем удобно. Для этого зависимость (рис. 4) аппроксимируем следующей кривой:

$$\alpha^2 + a\gamma^4 = b. \quad (22)$$



**Рис. 4.** Зависимость между  $\alpha, \beta$  «Зашемление–шарнир»  
**Fig. 4.** The relationship between  $\alpha, \beta$  «Hard termination–hinge»



Определяя коэффициенты  $a$  и  $b$ , получим:

$$\alpha^2 + 0,0849\gamma^4 = 20,19. \quad (23)$$

И в этом случае значения  $\alpha$  и  $\gamma$ , определяемые по (23), лежат в области устойчивости (рис. 4).

Учитывая соотношения (6), окончательно получим:

$$F + 0,0849 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 20,19 \frac{EI_z}{l^2}. \quad (24)$$

**Задача 2. Вариант закрепления «Шарнир–шарнир» с учетом собственного веса.**

Рассмотрим шарнирно опертый стержень (рис. 5). Здесь  $m = 0$ .

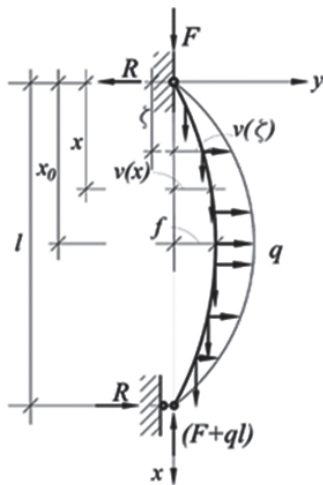


Рис. 5. Расчетная схема «Шарнир–шарнир»  
Fig. 5. Design scheme «Hinge–hinge»

Граничные условия: при  $x = 0, \xi = 0, v(0) = 0$ , надо положить  $A_0 = 0$ . Далее при  $x = 1, \xi = 1$ ,

$v(1) = 0$  и  $\frac{dv(1)}{d\xi} = 0$  и числовой поиск аналогичен предыдущему. Полученные соотношения запишем

$$\begin{cases} A_1 k_1 + r k_r = 0; \\ A_1 z_1 + r z_r = 0. \end{cases}$$

Условие существования ненулевых решений

$$D = \begin{vmatrix} k_1 & k_r \\ z_1 & z_r \end{vmatrix} = 0.$$

Процедура решения — как и ранее. Данные результатов сведены в табл. 1.

Зависимости между  $\beta$  и  $\gamma$  типичные и приведены на рис. 6.

При  $\beta = 0$  и  $\gamma = \pi$ , учитывая (13), получаем частный случай, т.е. формулу С.П. Тимошенко [1].

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}. \quad (25)$$

При  $\beta = 2,648058$  и  $\gamma = 0$ , учитывая (13), получаем частный случай, т.е. формулу А.Н. Динника [8].

График зависимости между  $\beta$  и  $\gamma$  можно аппроксимировать следующей кривой:

$$\beta^2 + a\gamma^4 = b. \quad (26)$$

Как и ранее, определяя коэффициенты  $a$  и  $b$ , получим:

$$\beta^3 + 0,191\gamma^4 = 18,57. \quad (27)$$

Таблица 1  
Table 1

**Зависимость коэффициентов  $\beta$  от  $\alpha$  для закрепления «Шарнир–шарнир»**  
**The dependence of the coefficients  $\beta$  on  $\alpha$  for fixing the «Hinge–hinge»**

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	2,648057	0,7	2,605857	1,4	2,468781	2,1	2,196462	2,8	1,587946
0,1	2,647209	0,8	2,592618	1,5	2,439619	2,2	2,135201	2,9	1,424479
0,2	2,644669	0,9	2,577424	1,6	2,407531	2,3	2,071442	3,0	1,200214
0,3	2,640422	1,0	2,560195	1,7	2,372278	2,4	1,999977	3,1	0,803247
0,4	2,634448	1,1	2,540819	1,8	2,333558	2,5	1,919087	3,141593	0,0
0,5	2,626722	1,2	2,519243	1,9	2,291001	2,6	1,826341		
0,6	2,617205	1,3	2,495281	2,0	2,244158	2,7	1,71802		

И в этом случае значения  $\beta$  и  $\gamma$ , определяемые по (13), лежат в области устойчивости (рис. 6).

Учитывая соотношения (13), окончательно получим:

$$ql + 0,191 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 18,57 \frac{EI_z}{l^2}. \quad (28)$$

Наибольшее значение прогиба (рис. 5) будет при

$$0,50l < x_0 < 0,54l. \quad (29)$$

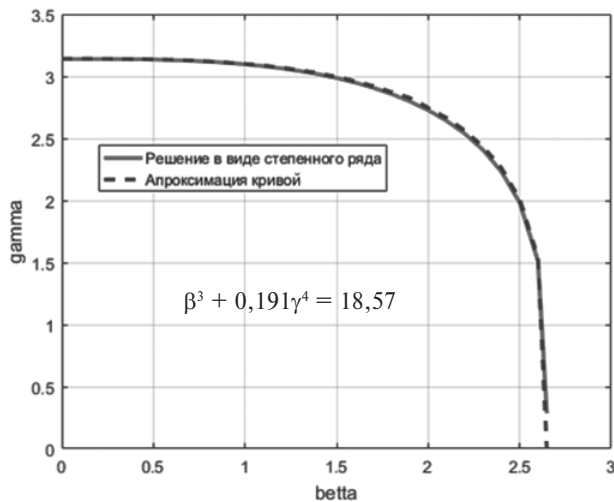


Рис. 6. Зависимость между  $\beta$ ,  $\gamma$  «Шарнир–шарнир»

**Задача 3. Вариант закрепления «Шарнир–зашемление» с учетом собственного веса.**

Рассмотрим стержень, у которого верхний конец шарнирный, а нижний конец зашемлен (рис. 7, а). В данном случае  $m = 0$ . Согласно условию закрепления, при  $x = 0$ ,  $\xi = 0$ ,  $v(0) = 0$ ,  $\frac{d^2 v(1)}{d\xi^2}$  надо положить  $A_0 = 0$ .

Далее при  $x = 1$ ,  $\xi = 1$ ,  $v(1) = 0$  и  $\frac{dv(1)}{d\xi}$  чис-

ловой поиск аналогичен предыдущему. Зависимость между  $\beta$  и  $\gamma$  показана на рис. 8. При  $\beta = 0$  и  $\gamma = 3,926601$ , учитывая (13), получаем формулу,

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}. \quad (30)$$

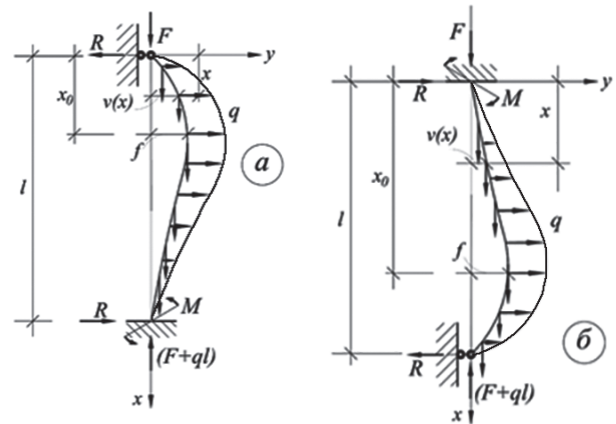


Рис. 7. Расчетные схемы:

а) «Шарнир–зашемление»; б) «Зашемление–шарнир»

Fig. 7. Settlement schemes:

а) «Hinge–hard termination»; б) «Hard termination–hinge»

При  $\gamma = 0$  и  $\beta = 3,744452$ , учитывая (13), получаем формулу А.Н. Динника [8],

$$l_{кр} = 3,74^3 \sqrt{\frac{EI_z}{q}}. \quad (31)$$

Приближенная зависимость (26) в данном случае имеет следующий вид:

$$\beta^3 + 0,221\gamma^4 = 52,50. \quad (32)$$

Или, учитывая соотношения (13), окончательно получим:

$$ql + 0,221 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 52,50 \frac{EI_z}{l^2}. \quad (33)$$

Наибольшее значение прогиба (рис. 6, а) будет при

$$0,42l < x_0 < 0,46l. \quad (34)$$

**Задача 3. Вариант крепления «Зашемление–шарнир» с учетом собственного веса.**

Рассмотрим стержень, у которого верхний конец зашемлен, а нижний конец шарнирно закреплен (рис. 7, б). Согласно условию закрепления, при  $x = 0$ ,  $\xi = 0$ ,  $v(0) = 0$ ,  $\frac{dv(1)}{d\xi}$  надо положить  $A_0 = 0$  и  $A_1 = 0$ .

Далее при  $x = 1$ ,  $\xi = 1$ ,  $v(1) = 0$  и  $\frac{d^2 v(1)}{d\xi^2} = 0$ .

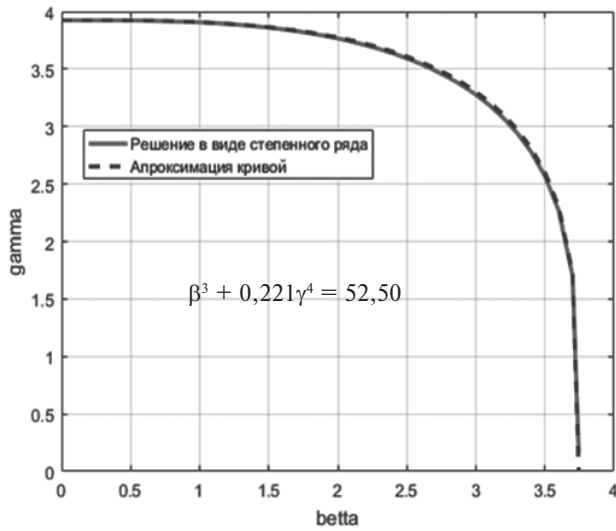


Рис. 8. Зависимость между  $\beta, \gamma$  «Шарнир–зашемление»  
 Fig. 8. The relationship between  $\beta, \gamma$  «Hinge–hard termination»

Графическая зависимость между  $\beta$  и  $\gamma$  на рис. 9. При  $\beta = 0$  и  $\gamma = 3,926601$ , учитывая (13), получаем формулу,

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}. \quad (35)$$

При  $\gamma = 0$  и  $\beta = 3,107555$ , учитывая (13), получаем формулу А.Н. Динника [8],

$$l_{кр} = 3,74^3 \sqrt{\frac{EI_z}{q}}. \quad (36)$$

Приближенная зависимость (22) в данном случае имеет следующий вид:

$$\beta^3 + 0,226\gamma^4 = 30,01 \quad (37)$$

Или, учитывая соотношения (13), окончательно получим:

$$ql + 0,126 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 30,01 \frac{EI_z}{l^2}. \quad (38)$$

Наибольшее значение прогиба (рис. 7, б) будет при

$$0,58l < x_0 < 0,63l. \quad (39)$$

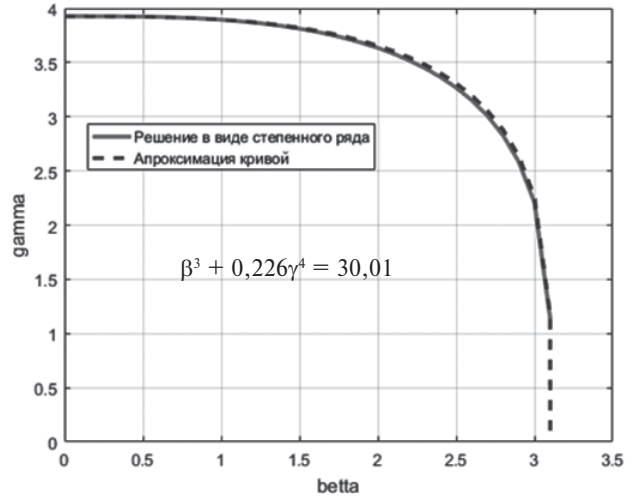


Рис. 9. Зависимость между  $\beta, \gamma$  «Зашемление–шарнир»  
 Fig. 9. The relationship between  $\beta, \gamma$  «Hard termination–hinge»

**Задача 4.** Вариант крепления «Свободный край–зашемление» с учетом собственного веса.

Рассмотрим стержень, у которого верхний конец свободный от закрепления, а нижний конец жестко заделан (рис. 10).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \int_0^x \beta^3 \psi \frac{dv}{d\psi} d\psi - \int_0^z \gamma^4 v(\psi) d\psi dz = -\gamma^4 \frac{f \xi^2}{l^2}, \quad (40)$$

где  $\beta^3 = \frac{ql^3}{EI_z}$ ;  $m = \frac{Ml}{EI_z}$ ;  $r = \frac{Rl^2}{EI_z}$ ;  $\gamma^4 = \frac{q\omega^2 l^4}{gEI_z}$ ; (41)

$$x = \xi l; \quad \zeta = l\psi; \quad y(x) = lv(x)$$

Решение уравнения (39) ищем в виде ряда (41).

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^n A_k \xi^k. \quad (42)$$

Проделав процедуры вычислений, как и ранее, получим:

$$A_4 = -\frac{\beta^3}{24} A_1 + \frac{\gamma^4}{24} A_0 - \frac{\gamma^4}{24} \frac{f}{l}.$$

Последующие коэффициенты ряда определяются по формуле

$$A_k = \frac{1}{k(k-1)} \left[ -\beta^3 A_{k-3} + \frac{\gamma^4}{(k-3)} A_{k-4} \right];$$

$$k = 5, 6, 7, \dots n.$$



Окончательное решение уравнения (40) будет в виде

$$v(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3 + \sum_{k=4}^n A_k\xi^k \quad (43)$$

с учетом найденных коэффициентов  $A_2, A_3, A_4$ .

Числовой поиск аналогичен предыдущему. График зависимости между  $\gamma$  и  $\beta$  — типичный (рис. 11).

При  $\gamma = 1,875104$  и  $\beta = 0$ , учитывая (40), получаем частный случай — формулу

$$\omega_{кр} = \frac{3,51}{l^2} \sqrt{gEI_z}. \quad (44)$$

При  $\gamma = 0$  и  $\beta = 1,986353$  получаем формулу Л. Эйлера [24]:

$$l_{кр} = 1,986 \sqrt{\frac{EI_z}{q}}. \quad (45)$$

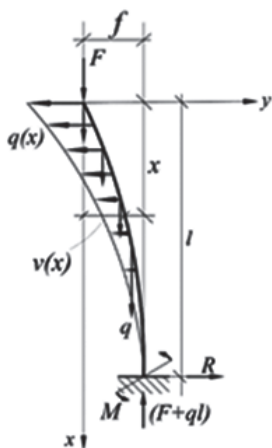


Рис. 10. Расчетная схема «Зашемление—свободный край»  
Fig. 10. Settlement scheme «Hard termination—free edge»

Приближенная зависимость в такой последовательности закрепления имеет следующий вид:

$$\beta^3 + 0,637\gamma^4 = 7,84$$

или, учитывая (40),

$$ql + 0,637 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 7,84 \frac{EI_z}{l^2}. \quad (46)$$

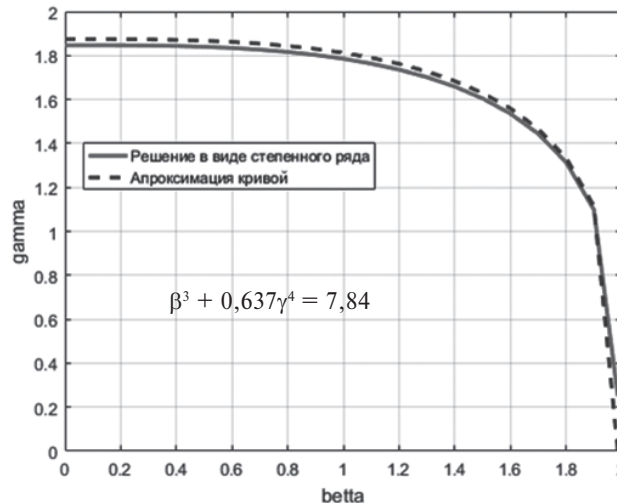


Рис. 11. Зависимость между  $\beta, \gamma$   
«Зашемление—свободный край»  
Fig. 11. The relationship between  $\beta, \gamma$   
«Hard termination—free edge»

**Обсуждение и заключения.** Получены уравнения выпучивания упругих вращающихся стержней при действии осевых сжимающих сил с учетом и без учета собственного веса постоянного поперечного сечения. Рассмотрены различные варианты закрепления стержней и представлена область устойчивой зоны стержней.

В случае, если гибкость  $\lambda$  меньше предельной гибкости  $\lambda_{пр}$ , формулы (24), (28), (38), (46) не применимы. Это касается коротких стержней, у которых пластические деформации возникают еще в стадии простого сжатия, т.е. до потери устойчивости. Отметим, что связь кривизны таких стержней с изгибающим моментом аналогична и для стержней, работающих в пределах закона Гука. Отличие заключается лишь в том, что модуль упругости  $E$  заменяется на приведенный модуль

$$E_{пр} = \frac{I_1 E_k - EI_2}{I_z},$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — моменты инерции зон догрузки и разгрузки относительно нейтральной оси;  
 $I_z$  — момент инерции всего сечения;  
 $E_k$  — касательный модуль.

Соответственно, если материал стержня имеет пластические деформации, модуль Юнга следует заменить на приведенный модуль упругости в соответствующих указанных выше формулах.

## Литература

1. Лейбензон Л.С. Неустойчивость направления вращательного бурения [Текст] / Л.С. Лейбензон // Азербайджанское нефтяное хозяйство. — 1922. — № 8. — С. 67–72.
2. Динник А.Н. Об отклонении буровых скважин при алмазном бурении [Текст] / А.Н. Динник // Горный журнал. — 1923. — № 3/4. — С. 160–162.
3. Динник А.Н. Причины искривления буровых скважин при вращательном бурении [Текст] / А.Н. Динник // Горный журнал. 1925. — № 10. — С. 823–630.
4. Симонянц Л.Е. Об упругой устойчивости вертикального вращающегося стержня [Текст] / Л.Е. Симонянц // Труды Грозного нефтяного института, 1953. Сб. И. вопр. геологии нефт. месторождений и бурения скважин. — С. 47–58.
5. Линевский А. Роль направлений и удлинителей в проведении вертикальной скважины [Текст] / А. Линевский // Азербайджанское нефтяное хозяйство. — 1932. — № 2. — С. 64–74.
6. Пановко Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем [Текст] / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. — М.: Наука, 1964. — 336 с.
7. Гуляев В.И. Динамика упругих систем при сложном движении (обзор) [Текст] / В.И. Гуляев // Прикладная механика. — 2003. — Т. 39. — № 5. — С. 28–51.
8. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings // J. Petrol. Sci. Eng. 2009. Vol. 67. No. 2. P. 140–148.
9. Gulyayev V.I., Borshch E.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // J. Petrol. Sci. Eng. 2011. Vol. 78. No. 3. P. 759–764.
10. Gulyayev V.I., Hudoly S.N., Glovach L.V. The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // Int. J. Solids Struct. 2011. No. 48. P. 110–118.
11. Gulyayev V.I., Khudoliy S.N., Andrusenko E.N. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes // Int. Multiscale Mech. 2011. Vol. 4. No. 1. P. 1–16.
12. Боднар Т.А. Устойчивость вращающегося сжатого стержня [Текст] / Т.А. Боднар // Прикладная механика и техническая физика. — 2000. — Т. 41. — № 4. — С. 190–197.
13. Вэньчже Я. Устойчивость вращающегося стержня, нагруженного осевой силой и вставленного в жесткую трубу с зазором [Текст] / Я. Вэньчже // Лесной вестник. — 2002. — № 5. — С. 179–181.
14. Сабиров Р.А. Продольно-поперечный изгиб стержня при его вращении в центрифуге [Текст] / Р.А. Сабиров // Решетневские чтения. — 2014. — Т. 1. — № 18.
15. Чжао Цзе. Устойчивость стационарных движений механических систем, содержащих деформируемые элементы [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Чжао Цзе. — М.: Изд-во Института механики, 2008.
16. Mohiuddin M.A., Khan K., Abdulraheem A. et al. Analysis of wellbore instability in vertical, directional, and horizontal wells using field data // Journal Petrol. Sci. Eng. 2006. Vol. 55. No. 1. P. 83–92.
17. Cunha J.C. Buckling of tubulars inside wellbores: a review on recent theoretical and experimental works // SPE Drill. Compl. 2006. Vol. 19. No. 1. P. 13–19.
18. Mitchell R.F., Miska S. Helical buckling of pipe with connectors and torque // SPE Drill. Compl. 2006. Выд. 21. No. 2. P. 108–115.
19. Kerr R.A. Bumpy road ahead for world's oil. Science, 18 Nov. 2005, Vol. 310. International Energy Annual 2001 Edition (EIA, U.S. Department of Energy, Washington, DC, 2003).
20. Tucker W.R., Wang C. An integrated model for drill-string dynamics // Journal of Sound and Vibrations, 1999, 224 (1).
21. Sun C., Lukasiewicz S. A new model on the buckling of a rod in tubing // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2006. Vol. 50.
22. Cunha J.C. Buckling of tubulars inside wellbores: a review on recent theoretical and experimental works. SPE Drilling & Completion. 2004. Vol. 19. No. 1.
23. Mitchell R.F. The twist and shear of helically buckled pipe, SPE Drilling & Completion. 2004. No. 19 (1).
24. Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutione problematica isoperimetrica lentissimo sensu accepta. Lausanne et Genevae, 1744, p. 245–250.

## References

1. Lejbenzon L.S. Neustojchivost' napravleniya vrashchatel'nogo bureniya [The instability of the direction of rotary drilling]. *Azerbajdzhanskoe neftyanoe hozyajstvo* [Azerbaijan oil industry]. 1922, Moscow, I. 8, pp. 67–72.
2. Dinnik A.N. Ob otklonenii burovih skvazhin pri almaznom burenii [On the deviation of boreholes during diamond drilling]. *Gornyj zhurnal* [Mining magazine]. 1923, I. 3/4, pp. 160–162.
3. Dinnik A.N. Prichiny iskrivleniya burovih skvazhin pri vrashchatel'nom burenii [Causes of borehole curvature during rotary drilling]. *Gornyj zhurnal* [Mining magazine]. 1925, I. 10, pp. 823–630.
4. Simonyanc L.E. Ob uprugoj ustojchivosti vertikal'nogo vrashchayushchegosya stержnya [Elastic stability of a vertical rotating rod]. *Trudy Gрозного neftyanogo institute* [Proceedings of the Grozny Oil Institute]. 1953, sb. I. Vopr. Geologii nef. mestorozhdenij i bureniya skvazhin Publ., pp. 47–58.
5. Linevskij A. Rol' napravlenij i udlinitelej v provedenii vertikal'noj skvazhiny [The role of directions and extensions in conducting a vertical well]. *Azerbajdzhanskoe neftyanoe hozyajstvo* [Azerbaijan oil industry]. 1932, I. 2, pp. 64–74.
6. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustojchivost' i kolebaniya uprugih sistem* [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1964. 336 p.
7. Gulyayev V.I. Dinamika uprugih sistem pri slozhnom dvizhenii (obzor) ["Dynamics of elastic systems under complex motion (review)"]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied mechanics]. 2003, Vol. 39. I. 5, pp. 28–51.
8. Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Solovjov I.L., and Gorbunovich I.V. The buckling of elongated rotating drill strings // J. Petrol. Sci. Eng. 2009. Vol. 67. No. 2. P. 140–148.
9. Gulyayev V.I. and Borshch E.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells // J. Petrol. Sci. Eng. 2011. Vol. 78. No. 3. P. 759–764.
10. Gulyayev V.I., Hudoly S.N., and Glovach L.V. The computer simulation of drill column dragging in inclined bore-holes with geometrical imperfections // Int. J. Solids Struct. 2011. No. 48. P. 110–118.
11. Gulyayev V.I., Khudoliy S.N., and Andrusenko E. N. Sensitivity of resistance forces to localized geometrical imperfections in movement of drill strings in inclined bore-holes // Int. Multiscale Mech. 2011. Vol. 4. No. 1. P. 1–16.

12. Bodnar' T.A. Ustojchivost' vrashchayushchegosya szhatogo sterzhnya [Stability of a rotating compressed rod]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied mechanics and technical physics]. 2000, Vol. 41, I. 4, pp. 190–197.
13. Ven'chzhe Ya. Ustojchivost' vrashchayushchegosya sterzhnya, nagruzhenogo osevoj siloj i vstavlennogo v zhestkuyu trubu s zazorom [Stability of a rotating rod loaded with an axial force and inserted into a rigid pipe with a gap]. *Lesnoj vestnik* [Bulletin of the Moscow State University of the Forest-Lesnoy Bulletin]. 2002, I. 5, pp. 179–181.
14. Sabirov R.A. Prodol'no-poperechnyj izgib sterzhnya pri ego vrashchenii v centrifuge [Longitudinal-transverse bending of a rod during its rotation in a centrifuge]. *Reshetnevskie chteniya* [Reshetnevskie readings]. 2014, Vol. 1, I. 18.
15. Chzhao Cze. *Ustojchivost' stacionarnyh dvizhenij mekhanicheskikh sistem, sodержashchih deformiruemye element. Kand. Diss.* [Stability of stationary movements of mechanical systems containing deformable elements. Cand. Diss.]. Moscow: Inst. mekh. Publ., 2008.
16. Mohiuddin M.A., Khan K., Abdulraheem A., et al. Analysis of wellbore instability in vertical, directional, and horizontal wells using field data // *J. Petrol. Sci. Eng.* 2006. Vol. 55. No. 1. P. 83–92.
17. Cunha J.C. Buckling of tubulars inside wellbores: a review on recent theoretical and experimental works // *SPE Drill. Compl.* 2006. Vol. 19. No. 1. P. 13–19.
18. Mitchell R.F. and Miska S. Helical buckling of pipe with connectors and torque // *SPE Drill. Compl.* 2006. Vol. 21. No. 2. P. 108–115.
19. Kerr R.A. Bumpy road ahead for world's oil. *Science*, 18 Nov. 2005, Vol. 310. International Energy Annual 2001 Edition (EIA, U.S. Department of Energy, Washington, DC, 2003).
20. Tucker W.R., Wang C. An integrated model for drill-string dynamics. *Journal of Sound and Vibrations*, 1999, 224 (1).
21. Sun C., Lukasiewicz S. A new model on the buckling of a rod in tubing. *Journal of Petroleum Science and Engineering*. 2006. Vol. 50.
22. Cunha J.C. Buckling of tubulars inside wellbores: a review on recent theoretical and experimental works. *SPE Drilling & Completion*, 2004. Vol. 19. No. 1.
23. Mitchell R.F. The twist and shear of helically buckled pipe, *SPE Drilling & Completion*. 2004. 19 (1).
24. Euler L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes sive solutione problematica isoperimetrica lentissimo sensu accepta.* Lausanne et Genevae, 1744, p. 245–250.