

УДК 624.04

РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА БАЛОК С ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Языев Сердар Батырович

доцент кафедры «Техническая механика» ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», кандидат технических наук, доцент (г. Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162), Россия
e-mail: russiangel@mail.ru

Аннотация: В статье предлагается методика расчета на боковое выпучивание балок переменного прямоугольного сечения на основе энергетического подхода. Методика рассмотрена на примере двухсекционной консольной балки переменной ширины, находящейся под действием сосредоточенной силы. Функция угла закручивания задавалась в виде тригонометрического ряда. В результате задача сводится к обобщенному вековому уравнению.

Ключевые слова: деревянная балка, устойчивость, переменная жесткость, боковое выпучивание, вековое уравнение.

CALCULATION OF THE STABILITY OF A PLANE BENDING OF BEAMS WITH A VARIABLE CROSS-SECTIONAL WIDTH

Serdar Yazyev

Associate Professor of the Department of "Technical Mechanics", Don State Technical University;

e-mail: russiangel@mail.ru

Abstract. The article proposes a technique for calculating the side buckling of beams of variable rectangular section based on the energy method. This method is considered on the example of a two-section cantilever beam of variable width under the action of a concentrated force. The twist angle function was set in the form of a trigonometric series. As a result, the problem is reduced to a generalized eigenvalue problem.

Keywords: timber beam, stability, variable stiffness, lateral buckling, eigenvalue problem.

Введение. При проектировании балок с узким прямоугольным сечением возникает необходимость их проверки на устойчивость плоской формы изгиба. В строительстве широко используются балочные конструкции с постоянной геометрией, а для снижения расхода материала целесообразно использовать балки переменной жесткости. Расчет балок переменного сечения по сравнению с расчетом конструкций постоянной жесткости связан с большими

математическими трудностями. В [1, 2] приведены решения для балок, геометрические характеристики которых являются непрерывными функциями координат. Если функции изменения жесткости конструкции имеют разрывы, возникает необходимость выполнения граничных условий на каждом стыке участков. В этом случае удобно не напрямую решать дифференциальные уравнения равновесия, а использовать вариационные методы [3].

Методика расчета. Рассмотрим методику расчета на примере балки с двумя участками (рисунок 1). Введем следующие обозначения:

$$\frac{b_2}{b_1} = \gamma; \quad \frac{b_1}{h} = \delta. \quad (1)$$

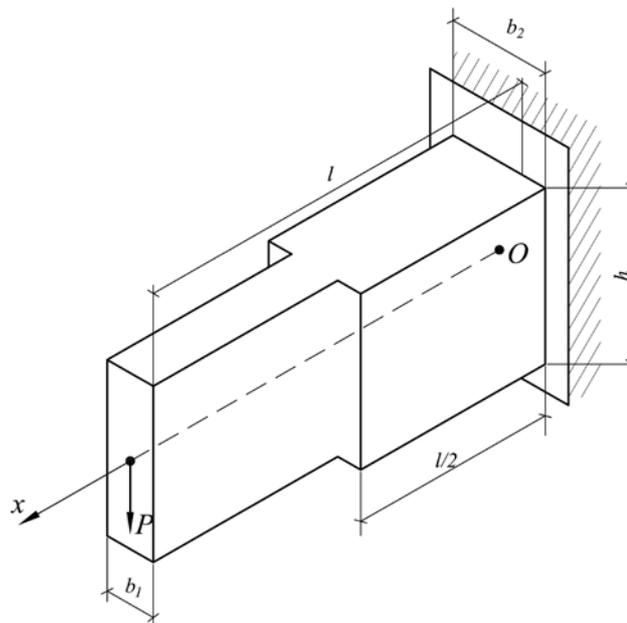


Рис. 1. Расчетная схема

Отношение изгибных жесткостей сечений в плоскости наименьшей жесткости рассчитывается по формуле:

$$\frac{EI_{z2}}{EI_{z1}} = \frac{b_2^3 h / 12}{b_1^3 h / 12} = \gamma^3. \quad (2)$$

Отношение крутильных жесткостей сечений рассчитывается как:

$$\frac{GI_{t2}}{GI_{t1}} = \frac{\frac{hb_2^3}{3} (1 - 0.63 \frac{b_2}{h})}{\frac{hb_1^3}{3} (1 - 0.63 \frac{b_1}{h})} = \gamma^3 \frac{1 - 0.63\delta\gamma}{1 - 0.63\delta} = \alpha. \quad (3)$$

Для решения используем энергетический метод в формулировке, представленной в [4]. Критическая нагрузка определяется из условия минимума полной энергии U , представляющей разницу между потенциальной энергией деформации W и работой внешних сил A :

$$U = W - A. \quad (4)$$

Потенциальная энергия деформации складывается из потенциальной энергии изгиба и кручения и в случае переменной жесткости определяется по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z(x) \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l GI_t(x) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx, \quad (5)$$

где v – прогиб, а θ – угол закручивания.

Работа внешних сил A определяется как [5]:

$$A = - \int_0^l M_y \theta \frac{d^2v}{dx^2} dx, \quad (6)$$

где M_y – изгибающий момент рассматриваемой балки, определяемый по формуле:

$$M_y(x) = -Pl + Px = Pl(\xi - 1). \quad (7)$$

В формуле (7) $\xi = x/l$ представляет собой безразмерную координату.

В момент бокового выпучивания соотношение между второй производной прогиба, изгибающим моментом и углом закручивания имеет вид [6]:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M_y \theta}{EI_z}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), а затем (6) и (5) в (4), получаем:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l GI_t(x) \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{EI_z(x)} dx. \quad (9)$$

Для балки, показанной на рисунке 1, выражение (9) принимает вид:

$$U = \frac{1}{2} (GI_{t1} \int_0^{0.5l} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + GI_{t2} \int_{0.5l}^l \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{EI_{z1}} \int_0^{0.5l} P^2 (l-x)^2 \theta^2 dx - \frac{1}{EI_{z2}} \int_{0.5l}^l P^2 (l-x)^2 \theta^2 dx). \quad (10)$$

Введем безразмерную величину λ по формуле:

$$\lambda = \frac{P^2 l^4}{GI_{t1} EI_{z1}}. \quad (11)$$

Минимизация функционала U эквивалентна минимизации функционала

$\Lambda = \frac{Ul}{GI_{t1}}$, который записывается как:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(\alpha \int_0^{0.5} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi + \int_{0.5}^1 \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi - \lambda \left[\frac{1}{\gamma^3} \int_0^{0.5} (\xi-1)^2 \theta^2 d\xi + \int_{0.5}^1 (\xi-1)^2 \theta^2 d\xi \right] \right). \quad (12)$$

Функцию угла закручивания будем искать в виде:

$$\theta = a_1 \sin \frac{\pi \xi}{2} + a_2 \sin \frac{3\pi \xi}{2} + a_3 \sin \frac{5\pi \xi}{2} + \dots = \sum_{i=1}^n a_i \sin \frac{\pi(2i-1)\xi}{2}. \quad (13)$$

Подставляя (13) в (12) и минимизируя функционал Λ с неизвестными коэффициентами a_i , получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$([A] - \lambda[B])\{X\} = 0, \quad (14)$$

где $\{X\} = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n\}^T$ – вектор коэффициентов ряда.

Коэффициенты A_{ij} и B_{ij} матриц $[A]$ и $[B]$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{\pi^2}{4} \left(\alpha \int_0^{0.5} (2i-1)(2j-1) \cos \frac{\pi(2i-1)\xi}{2} \cos \frac{\pi(2j-1)\xi}{2} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{0.5}^1 (2i-1)(2j-1) \cos \frac{\pi(2i-1)\xi}{2} \cos \frac{\pi(2j-1)\xi}{2} d\xi \right), \\ B_{ij} &= \frac{1}{\gamma^3} \int_0^{0.5} \sin \frac{\pi(2i-1)\xi}{2} \sin \frac{\pi(2i-1)\xi}{2} (\xi-1)^2 d\xi + \\ &\quad + \int_{0.5}^1 \sin \frac{\pi(2i-1)\xi}{2} \sin \frac{\pi(2i-1)\xi}{2} (\xi-1)^2 d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Интегрирование в формулах (15) может выполняться численно или с использованием пакетов символьных вычислений. Критическая нагрузка определяется из условия равенства нулю определителя системы (14):

$$|[A] - \lambda[B]| = 0. \quad (16)$$

Критическая нагрузка определяется из (11) по формуле:

$$P_{cr} = K \frac{\sqrt{GI_{t1}EI_{z1}}}{l^2}, \quad (17)$$

где $K = \sqrt{\lambda_{\min}}$, λ_{\min} – минимальное собственное значение.

Результаты и обсуждение. Была решена тестовая задача при $\gamma = 1.1$, $\delta = 0.1$. На рисунке 2 показан график изменения коэффициента K в зависимости от количества членов ряда. Наблюдается хорошая сходимость. Результаты четвертого и пятого приближений практически совпадают. При одном члене ряда результат отличается от точного на 4,6%.

Значение коэффициента K при $n = 4$ составляет 5,0386. При таких начальных данных рассматриваемая задача была решена ранее в [7], и для коэффициента K было получено значение 5,03. Решение, предложенное в [7], основано на прямом интегрировании дифференциальных уравнений в каждом участке при удовлетворении условий на границах. При большом количестве участков решение этим методом значительно усложняется. Предлагаемый нами метод лишен этого недостатка и позволяет получить решение для любого количества участков.

Выводы. Получено разрешающее уравнение энергетического метода для расчета на боковое выпучивание балок с переменной шириной прямоугольного сечения. Задача сводится к обобщенному вековому уравнению. Продемонстрирована хорошая сходимость метода. Достоверность результатов подтверждается сравнением с решением других авторов. Предлагаемая методика позволяет рассчитывать конструкции переменной жесткости при произвольном количестве участков. В рассматриваемой задаче не учитывается

вертикальное смещение нагрузки относительно центра тяжести. Более подробно эти вопросы для балок с постоянным поперечным сечением рассмотрены в работе [8]. Также мы не исследовали проблему наличия начальных несовершенств и учета физической нелинейности, которые рассматриваются в [9-10].

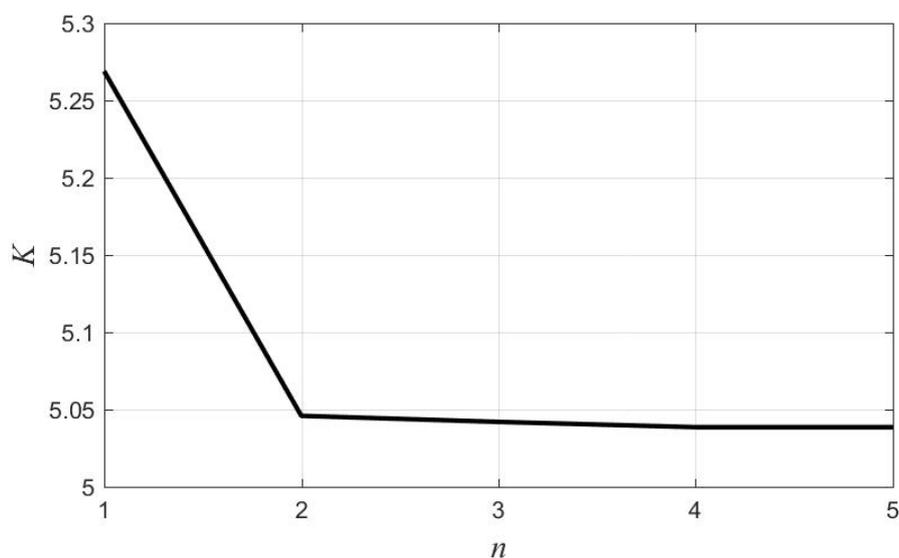


Рис. 2. Зависимость коэффициента K от количества членов ряда.

Литература

1. Karamisheva A. A., Yazyev S. B., Avakov A. A. Calculation of plane bending stability of beams with variable stiffness //Procedia Engineering. – 2016. – Т. 150. – С. 1872-1877.
2. Lapina A. et al. Calculation of beams with corrugated wall on the stability of a flat bending shape //E3S Web of Conferences. – EDP Sciences, 2019. – Т. 97. – С. 04067.
3. Yazyev S. et al. Side busking of the cantilever beam with narrow rectangular cross section //E3S Web of Conferences. – EDP Sciences, 2019. – Т. 97. – С. 04066.
4. Лапина, А.П. Совершенствование энергетического метода в расчетах балок на устойчивость плоской формы изгиба / А. П. Лапина, А. С. Чепурненко, И. М. Зотов, Б.М. Языев // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2019. – № 4 (77). – С. 5-16.
5. Макушин В.М., Савельев Н.Г., Нгуен Ван Хунг. Устойчивость плоской формы полос при совместном действии поперечной и продольной нагрузки // Расчеты на прочность. – М., 1969, вып.14. – С.268-289.
6. Тимошенко, С.П. Устойчивость упругих систем. – Л., М.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.

7. Смирнов А. Ф. Строительная механика: Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
8. Cherpurnenko A. et al. Calculation of wooden beams on the stability of a flat bending shape enhancement // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences, 2018. – Т. 196. – С. 01003.
9. Zotov I. M. et al. Rectangular Cross Section Beams Calculation on the Stability of a Flat Bending Shape Taking into Account the Initial Imperfections // Materials Science Forum. – Trans Tech Publications Ltd, 2020. – Т. 974. – С. 551-555.
10. Zotov, I.M. et al. Calculation of the Rectangular Cross-Section Beams On the Side Buckling Taking into Account Creep // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 661. – С. 012004

References

1. Karamisheva A. A., Yazyev S. B., Avakov A. A. Calculation of plane bending stability of beams with variable stiffness. Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. Pp. 1872-1877.
2. Lapina A. et al. Calculation of beams with corrugated wall on the stability of a flat bending shape. E3S Web of Conferences. EDP Sciences, 2019. Vol. 97. Article 04067.
3. Yazyev S. et al. Side busking of the cantilever beam with narrow rectangular cross section. E3S Web of Conferences. EDP Sciences, 2019. Vol. 97. Article 04066.
4. Lapina A.P., Cherpurnenko A.S., Zotov I.M., Yazyev B.M. Sovershenstvovaniye energeticheskogo metoda v raschetakh balok na ustoychivost' ploskoy formy izgiba [Improvement of the energy method in the calculations of beams for the stability of a plane bending shape] // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura. 2019. No. 4 (77). Pp. 5-16.
5. Makushin V.M., Savel'yev N.G., Nguyen Van Khung. Ustoychivost' ploskoy formy polos pri sovместnom deystvii poperechnoy i prodol'noy nagruzki [tability of the flat form of strips under the combined action of transverse and longitudinal loads] // Raschety na prochnost'. Moscow, 1969, vol.14. Pp.268-289.
6. Timoshenko S.P. Ustoychivost' uprugikh system [Stability of elastic systems]. L., M.: Gostekhizdat, 1946. 532 p.
7. Smirnov A. F. Stroitel'naya mekhanika: Dinamika i ustoychivost' sooruzheniy [Structural mechanics: Dynamics and stability of structures]. Moscow: Stroyizdat, 1984. 416 p.
8. Cherpurnenko A. et al. Calculation of wooden beams on the stability of a flat bending shape enhancement // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences, 2018. Vol. 196. Article 01003.

9. Zotov I. M. et al. Rectangular Cross Section Beams Calculation on the Stability of a Flat Bending Shape Taking into Account the Initial Imperfections //Materials Science Forum. Trans Tech Publications Ltd, 2020. Vol. 974. Pp. 551-555.
10. Zotov, I.M. et al. Calculation of the Rectangular Cross-Section Beams On the Side Buckling Taking into Account Creep //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 661. Article 012004.