Метод аналогий между гидравликой двухмерных в плане водных потоков и газовой динамикой

УДК 532.5 : 004.942

Александрова М.С.
Аспирант кафедры «Общеинженерные дисциплины», ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова» (г. Новочеркасск); e-mail: e_masha@mail.ru

Статья получена: 11.05.2020. Рассмотрена: 18.05.2020. Одобрена: 16.06.2020. Опубликована онлайн: 30.06.2020. ©РИОР

Аннотация. Рассмотрены реальные потенциальные двухмерные потоки практической гидравлики, которые можно с определенной точностью рассматривать как двухмерные в плане, что подтверждает актуальность работы. Предложено использовать метод аналогий при применении уравнений газовой динамики в гидравлике. Получен важный результат для развития аналитической теории двухмерных в плане потенциальных водных потоков.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, метод аналогий, двухмерные в плане потенциальные водные потоки, задачи практической гидравлики.

Фундаментальной работой и до настоящего времени остается преобразование общих уравнений газовой динамики к независимым переменным в плоскости годографа скорости. Этот переход из физической плоскости в плоскость годографа скорости приводит к замечательному результату: нелинейные уравнения газовой динамики становятся линейными.

Целью работы является заимствование этого метода применительно к движению потенциальных двухмерных в плане стационарных открытых водных потоков и изучение работ выполненных различными авторами [1–5].

Условие отсутствия вихря для газа при его плоском движении имеет вид [6]

$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad (1)$$

где u, v — проекции вектора скорости на декартовые оси координат.

Уравнение неразрывности совершенного газа имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \qquad (2)$$

где ρ — плотность газа.

Из (1), (2) можно заключить о наличии потенциала скоростей φ и функции тока ψ так, что:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \;\; v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ \dfrac{\rho}{\rho_0} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}, \; \dfrac{\rho}{\rho_0} v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x}, \end{cases} \qquad (3)$$

где ρ_0 — плотность в покоящемся газе.

Отсюда следует обобщенная связь между сопряженной скоростью и производной от комплексного потенциала по координате равенство

METHOD OF ANALOGIES BETWEEN HYDRAULICS OF TWO-DIMENSIONAL WATER FLOWS AND GAS DYNAMICS

Aleksandrova M.S.
Postgraduate Student, Department of General Engineering Disciplines, Platov South-Russian State Polytechnic University, Novocherkassk; e-mail: e_masha@mail.ru

Manuscript received: 11.05.2020. **Revised**: 18.05.2020. **Accepted**: 16.06.2020. **Published online:** 30.06.2020. ©RIOR

Abstract. Real potential two-dimensional flows of practical hydraulics are considered, which can be considered with a certain accuracy as two-dimensional in terms, which confirms the relevance of the work. It is proposed to use the method of analogies when applying gas dynamics equations in hydraulics. An important result was obtained for the development of the analytical theory of two-dimensional potential water flows.

Keywords: equations of gas dynamics, method of analogies, two-dimensional potential water flows, problems of practical hydraulics.

$$dz = \left(d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}d\psi\right)\frac{1}{V}e^{i\theta}. \qquad (4)$$

При совершении перехода в плоскость годографа скорости (V, θ), где θ — угол, характеризующий направление вектора скорости $\vec{V}$.

При известной изэнтропической формуле

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{-\frac{1}{k-1}}, \qquad (5)$$

где k — коэффициент адиабатического течения газа;

λ — скоростной коэффициент:

$$\lambda = \left(\frac{V}{V_{\max}}\right)^2. \qquad (6)$$

Вводя вместо переменной λ переменную

$$\tau = \frac{k-1}{k+1}\cdot\lambda^2,$$

А.С. Чаплыгин получил систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -\dfrac{1}{2\tau}\cdot\dfrac{1-\dfrac{k+1}{k-1}\tau}{(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}; \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \dfrac{2\tau}{(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}, \end{cases} \qquad (7)$$

которая сводится к решению уравнения для функции тока:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[2\tau(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right] + \frac{1-\dfrac{k+1}{k-1}\tau}{2\tau(1-\tau)^{\frac{k}{k-1}}}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \qquad (8)$$

Для двухмерного в плане потенциального потока справедливы уравнения:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \qquad (9)$$

Для функции тока:

$$\frac{h}{h_0}u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{h}{h_0}v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (10)$$

И справедлива система:

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}; \\ \dfrac{h}{h_0}u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \dfrac{h}{h_0}v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}. \end{cases} \qquad (11)$$

При этом для двухмерных в плане потенциальных потоков справедлив интеграл Д. Бернулли:

$$\frac{V^2}{2g} + h = H_0, \qquad (12)$$

где

$$V^2 = u^2 + v^2. \qquad (13)$$

При этом для бурных потоков $F > 1$, где $F = \dfrac{V^2}{2gH_0}$ — критерий Фруда. Для спокойных потоков $F < 1$.

Сравнивая системы (3) и (11) видим, что их вид совпадает с той лишь разницей, что в систему (3) входит плотность ρ, а в систему (11) — h.

При этом уравнения (5) и (12) также похожи, поэтому видна аналогия между течением газа и течением жидкости.

Опуская детальный вывод, получим для двухмерного в плане потока вместо связи (4) следующую связь:

$$dz = \left(d\varphi + i\frac{h_0}{h}d\psi\right)\frac{1}{V}e^{i\theta}. \qquad (14)$$

А вместо системы (7) следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \dfrac{h_0}{2H_0}\cdot\dfrac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}; \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\dfrac{h_0}{H_0}\cdot\dfrac{\tau}{1-\tau}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}, \end{cases} \qquad (15)$$

где

$$H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h_0 \text{ —} \qquad (16)$$

постоянная в интеграле Д. Бернулли;

V_0, h_0 — величина скорости и глубины в характерной для потока точке.

При этом справедлив интеграл Д. Бернулли для всей области течения потока:

$$H_0 = \frac{V^2}{2g} + h. \tag{17}$$

Для скоростей и глубин справедливы формулы:

$$V = \tau^{1/2} \cdot \sqrt{2gH_0}; \quad h = H_0 \cdot (1 - \tau), \tag{18}$$

где τ, θ — независимые параметры в плоскости годографа скорости.

$$F = \frac{2\tau}{1 - \tau};$$

$0 \le \tau < \frac{1}{3}$ — для спокойных потоков; $\frac{1}{3} < \tau \le 1$ — для бурных потоков.

Система (15) сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{2\tau}{1 - \tau} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\right\} + \frac{1 - 3\tau}{2\tau(1 - \tau)^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0. \tag{19}$$

Уравнение (19) полностью совпадает с уравнением (8) при $K = 2$.

Следовательно, для решения задач по течению двухмерных в плане потенциальных потоков можно использовать аналитические решения уравнения (19), полученные великим ученым-механиком С.А. Чаплыгиным. Ранее уравнение (19) и формулы (14) были получены авторами в работах [7; 8] и решении различных задач [1–5]. Однако в настоящей работе в доступной переработанной форме изложен сам метод аналогии, для широкого читателя и пропаганды актуального метода С.А. Чаплыгина.

Выводы

Результат, полученный в настоящей работе, является фундаментальным для развития аналитической теории двухмерных в плане потенциальных водных потоков. Актуальность работы также очевидна вследствие того, что многие реальные потоки практической гидравлики можно с определенной точностью рассматривать как двухмерные в плане, потенциальные.

Литература

1. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Two-dimensional motion equations in water flow zone // (2019) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 698(6), 066026. DOI: 10.1088/1757-899X/698/6/066026.
2. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* A System of Equations for Potential Two-Dimensional In-Plane Water Courses and Widening the Spectrum of Its Analytical Solutions // (2019) AIP Conference Proceedings 2188, 050017. DOI: 10.1063/1.5138444.
3. *Kokhanenko V. N., Kelekhsaev D. B., Kondratenko A. I., Evtushenko S.I.* Solution of equation of extreme streamline with free flowing of a torrential stream behind rectangular pipe // (2020) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 775 (1), 012134. DOI: 10.1088/1757-899X/775/1/012134.
4. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Solution of Equations of Motion of Two-Dimensional Water Flow // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 3. P. 5–12. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-3-5-12.
5. *Kokhanenko V.N., Burtseva O.A., Evtushenko S.I., Kondratenko A.I., Kelekhsaev D.B.* Two-Dimensional in Plan Radial Flow (NonPressure Potential Source) // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 4. P. 74–78. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-4-74-78.
6. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. — 5-е изд. — М.: Наука, 1978. — 736 с.
7. *Коханенко В.Н.* Моделирование бурных двухмерных в плане водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, М.А. Лемешко, Н.Г. Папченко; Под общей ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. — 180 с.
8. *Есин А.И.* Задачи технической механики жидкости в декартовых координатах [Текст] / А.И. Есин. — Саратов, 2003.

References

1. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A. I., Evtushenko S.I. Two-dimensional motion equations in water flow zone // (2019) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 698(6), 066026. DOI: 10.1088/1757-899X/698/6/066026.
2. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. A System of Equations for Potential Two-Dimensional In-Plane Water Courses and Widening the Spectrum of Its Analytical Solutions // (2019) AIP Conference Proceedings 2188, 050017. DOI: 10.1063/1.5138444.

3. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. Solution of equation of extreme streamline with free flowing of a torrential stream behind rectangular pipe // (2020) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 775 (1), 012134. DOI: 10.1088/1757-899X/775/1/012134.
4. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A. I., Evtushenko S.I. Solution of Equations of Motion of Two-Dimensional Water Flow // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 3. P. 5–12. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-3-5-12.
5. Kokhanenko V.N., Burtseva O.A., Evtushenko S.I., Kondratenko A.I., Kelekhsaev D.B. Two-Dimensional in Plan Radial Flow (NonPressure Potential Source) // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 4. P. 74–78. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-4-74-78.
6. Lojcyanskij L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza [Mechanics of liquid and gas]. Moscow: Nauka Publ., 1978. 736 p.
7. Kohanenko V.N. Modelirovanie burnyh dvuhmernyh v plane vodnyh potokov [Modeling of turbulent two-dimensional in terms of water flows]. Rostov-on-Don: YuFU Publ., 2013. 180 p.
8. Esin A.I. Zadachi tekhnicheskoj mekhaniki zhidkosti v dekartovyh koordinatah [Problems of technical fluid mechanics in Cartesian coordinates]. Saratov, 2003.