Construction and Architecture (2019) Vol. 7. Issue 4 (25): 74–78
DOI 10.29039/2308-0191-2019-7-4-74-78 *При цитировании этой статьи ссылка на DOI обязательна*

05.23.16 ГЕОЛОГИЯ, ГИДРАВЛИКА И ИНЖЕНЕРНАЯ ГИДРОЛОГИЯ

Двухмерный в плане радиальный поток как безнапорный потенциальный источник

Коханенко В.Н.
Д-р техн. наук, доцент, кафедра «Инженерные конструкции», ФГБОУ ВО «Российский государственный аграрный университет — МСХА имени К.А. Тимирязева» (г. Москва)

Бурцева О.А.
Канд. техн. наук, доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины», ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова» (г. Новочеркасск); e-mail: kuzinaolga@yandex.ru

Евтушенко С.И.
Д-р техн. наук, профессор, почетный работник высшего образования Российской Федерации, советник РААСН, член РОМГГиФ, профессор кафедры «Информационные системы, технология и автоматизация строительства» Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ) (г. Москва); e-mail: evtushenkosi@mgsu.ru

Кондратенко А.И.
Канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерные конструкции», ФГБОУ ВО «Российский государственный аграрный университет — МСХА им. К.А. Тимирязева» (г. Москва); e-mail: ai_kondratenko@mail.ru

Келехсаев Д.Б.
Аспирант кафедры «Общеинженерные дисциплины», ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова» (г. Новочеркасск); e-mail: d-kelekhsaev@mail.ru

Статья получена: 03.12.2019. Рассмотрена: 05.12.2019. Одобрена: 30.12.2019. Опубликована онлайн: 31.12.2019. ©РИОР

Аннотация. Рассмотрена задача определения параметров двухмерного в плане потенциального радиального открытого водного потока. Поставлена краевая задача для случая нестационарного водного потока и неопределенной радиальной границы.

Ключевые слова: открытый нестационарный водный поток, уравнения движения.

Общее обоснование необходимости исследований. Задача определения параметров двухмерного в плане потенциального радиального потока (источника) имеет важные для практики приложения [1] и определенный теоретический интерес как наиболее простой элемент для развития теории двухмерных в плане открытых водных потоков в целом.

TWO-DIMENSIONAL IN PLAN RADIAL FLOW (NON-PRESSURE POTENTIAL SOURCE)

Viktor Kokhanenko
Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Engineering Constructions, Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow
Olga Burtseva
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Engineering Disciplines, Platov South Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk; e-mail: kuzinaolga@yandex.ru
Sergey Evtushenko
Doctor of Engineering, Professor, Honored Worker of Higher Education of Russia, Council of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Department «Information systems, technologies and construction automation", Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow; e-mail: evtushenko_s@novoch.ru
Anatoliy Kondratenko
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Engineering Structures, Timiryazev Russian State Agrarian University — Moscow Agricultural Academy, Moscow; e-mail: ai_kondratenko@mail.ru
Dmitriy Kelekhsaev
Postgraduate Student, Department of General Engineering Disciplines, Platov South Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk; e-mail: d-kelekhsaev@mail.ru
Manuscript received: 03.12.2019. **Revised**: 05.12.2019. **Accepted**: 30.12.2019. **Published online:** 31.12.2019. ©RIOR
Abstract. The problem of determining the parameters of two-dimensional in plan of potential radial open water flow is considered. The boundary-value problem is posed for the case of unsteady water flow and an indefinite radial boundary.
Keywords: open unsteady water flow, equations of motion.

Однако для нестационарных потоков решение этой задачи не встречается в научной литературе по гидравлике открытых потоков и требует решения.

Несмотря на значительную степень идеализации модели течения реально потока, решение задач по гидравлике открытых потоков (двухмерных в плане, потенциальных) имеет важное принципиальное и определенное практическое значение. Принципиальное значение определяется тем, что при исследовании особенностей движения в наиболее простом случае удается выявить основные динамические свойства потенциального течения, которые характерны для реального потока. Расчетные соотношения для потенциального потока получаются наиболее простыми и удобными для использования.

Практическое значение случая потенциально течения в горизонтальном русле также существенно. В ряде случаев роль сил сопротивления относительно невелика. Например, при протекании бурного потока через местные сужения, расширения или изгибы русла. Здесь основное формирующее влияние на поток оказывает инерционность его частиц и, если рассматривается не слишком протяженный участок потока, влиянием сил сопротивления можно пренебречь. Примерами могут служить потоки на виражах и рассеивающих трамплинах быстротоков, методы расчета которых, не учитывают сил сопротивления. В некоторых случаях силы сопротивления играют относительно малую роль потому, что они частично или полностью компенсируются действием силы тяжести. Для таких случаев схема потенциального движения в горизонтальном русле оказывается близкой к действительности.

И наконец, во многих практических задачах не требуется высокой точности получаемых расчетом результатов, а вполне достаточно получить ориентировочные значения параметров потока с точность 10–20%.

Установившее течение воды. Уравнения движения потока и граничные условия в физической плоскости. Пусть двухмерный открытый бурный поток движется так, что его линиями тока являются прямые лучи, выходящие из начала координат [1] (рис. 1).

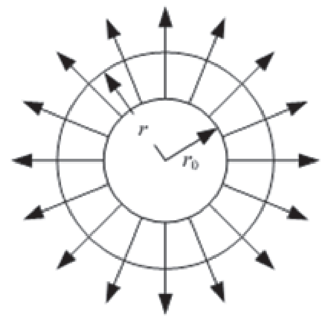

Рис. 1. Вид радиального расширения потока в плане: r_0 — радиус начальной окружности; r — текущий радиус

При этом на радиусе r_0 заданы параметры потока

$$h = h_0,\ V = V_0, \tag{1}$$

где h — местная глубина потока; V — модуль местной скорости.

Для бурных потоков выполняется условие

$$F_0 = \frac{V_0^2}{gh_0} > 1. \tag{2}$$

Система уравнений движения потока в цилиндрических координатах имеет следующий вид [1]:

$$\begin{cases} V_r\dfrac{\partial V_r}{\partial r} + \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} + V_z\dfrac{\partial V_r}{\partial z} - \dfrac{V_\theta^2}{r} = F_r - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} - T_r; \\ V_r\dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} + \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + V_z\dfrac{\partial V_\theta}{\partial z} + \dfrac{V_r V_\theta}{r} = F_\theta - \dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} - T_\theta; \\ V_r\dfrac{\partial V_z}{\partial r} + \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\dfrac{\partial V_z}{\partial z} = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} - T_z, \end{cases} \tag{3}$$

где обозначено: V_r, V_θ, V_z — радиальная, окружная и вертикальная составляющие местной скорости; F_r, F_θ, Fz — составляющие объемных сил; T_r, T_θ, T_z — компоненты сил сопротивления, отнесенные к единице массы жидкости.

Ввиду того что вертикальные составляющие скоростей и ускорений малы, членами, содержащими V_z и их производными, можно пренебречь. Вертикальная составляющая силы сопротивления T_z, зависящая от величины V_z, также исключается из рассмотрения. Тогда из третьего уравнения системы (3) можно определить гидростатический закон распределения давления и составляющие градиента давления:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = g\rho\frac{\partial}{\partial r}\left(z_4 + h\right); \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = g\rho\frac{\partial}{\partial \theta}\left(z_4 + h\right).$$

С учетом преобразований система уравнений (3) совместно с уравнением неразрывности примет следующий вид:

$$\begin{cases} V_r\dfrac{\partial V_r}{\partial r} + \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_r}{\partial \theta} - \dfrac{V_\theta^2}{r} = -g\dfrac{\partial}{\partial r}\left(z_4 + h\right) - T_r; \\ V_r\dfrac{\partial V_\theta}{\partial r} + \dfrac{V_\theta}{r}\dfrac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{V_r V_\theta}{r} = -\dfrac{g}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(z_4 + h\right) - T_\theta; \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(rV_r h\right) + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta h\right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В системе (4) полагается дно русла гладкое, горизонтальное ($z_\partial = 0$) и силы трения потока о дно русла не учитываются $T_r = T_\theta = 0$. Полагаем, что открытый поток движется так, что его линиями тока являются прямые лучи, выходящие из начала координат (рис. 1), тогда $V_\theta = 0$ и система (4) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} V_r\dfrac{\partial V_r}{\partial r} + g\dfrac{\partial}{\partial r}\left(h\right) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(h\right) = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\left(rV_r h\right) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

Из системы (5) следует интеграл Д. Бернулли для двухмерных в плане потенциальных открытых водных потоков

$$\frac{V^2}{2g} + h = H_0; \quad H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h_0, \quad (6)$$

где $V = V_r$, H_0 — постоянная в интеграле Д. Бернулли.

Из третьего уравнения системы (5) следует уравнение неразрывности потока (сохранение расхода $Q = const$)

$$2\pi rVh = Q, \quad (7)$$

где r — текущий радиус (расстояние от центра O), $r \geq r_0$.

Уравнения (6), (7) — это уравнения движения потока в физической плоскости.

Перейдем далее к уравнениям движения потока и граничным условиям в плоскости годографа скорости.

Введем параметр кинетичности потока следующим образом [2–5]:

$$\tau = \frac{V^2}{2gH_0}, \quad (8)$$

тогда из выражений (6) и (7) получаем:

$$\begin{gathered} V = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}; \quad V^2 = 2\tau gH_0; \\ h = H_0 - \frac{V^2}{2g} = H_0(1-\tau), \ \tau_0 = \frac{V_0^2}{2gH_0}, \\ r = \frac{Q}{2\pi H_0\sqrt{2gH_0}\,\tau^{1/2}(1-\tau)}, \end{gathered} \quad (9)$$

причем условие $\tau_0 \leq \tau < 1$ выполняется для бурных потоков.

Определение потенциальной функции «φ»

Изменение потенциальной функции в полярных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = V_r = V; \quad \frac{d\varphi}{dr} = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = V_\theta = 0. \quad (10)$$

Тогда дифференциал радиальной составляющей потока $dr = f(\tau)d\tau$ из (9) примет вид

$$\begin{aligned} dr &= \frac{Q}{2\pi H_0\sqrt{2gH_0}}d\left[\frac{1}{\tau^{1/2}(1-\tau)}\right] = \\ &= \frac{Q}{2\pi H_0\sqrt{2gH_0}}\frac{3\tau-1}{2\tau^{1/2}\tau(1-\tau)^2}d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) во второе уравнение системы (10), получаем

$$d\varphi = \frac{Q}{4\pi H_0}\frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2}d\tau. \quad (12)$$

Интегрирование выражения (12) позволяет получить потенциал функции «φ». Полагая $\varphi_0 = 0$, имеем

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi H_0}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2}d\tau =$$
$$= \frac{Q}{4\pi H_0}\left[\frac{2}{1-\tau} - \ln\frac{\tau}{1-\tau} - \frac{2}{1-\tau_0} + \ln\frac{\tau_0}{1-\tau_0}\right]. \quad (13)$$

Уравнения нестационарного течения потока

Инженерные задачи, приводящие к нахождению скорости V и глубины потока h весьма разнообразны. В данной статье авторы ограничились задачей радиального открытого потока (т.е. отсутствием конфигурации русла в плане). Дополнив данные о рельефе дна и значениями скоростей в одном из граничном живом сечении, можно получить форму свободной поверхности и распределение скоростей в пределах выбранного участка.

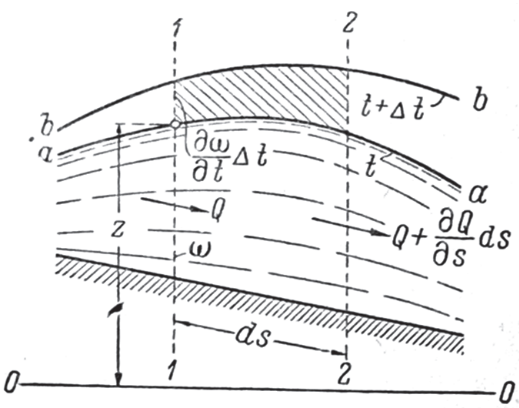

Рис. 2. Живое сечение радиального потока

Рассмотрим живое сечение радиального потока (рис. 2). Изменение объемного расхода жидкости, протекшей через площадку потока dS описываем уравнением [6]

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial S} = 0, \quad (14)$$

где $\omega = 2\pi rh$ — площадь живого сечения.

После подстановки ω в уравнение (14), получаем

$$\frac{\partial(2\pi rh)}{\partial t} + \frac{\partial(2\pi rhV)}{\partial r} = 0.$$

Поскольку в данной точке живого сечения текущее значение радиуса не изменяется, из уравнения (14) получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rhV)}{\partial r} = 0. \quad (15)$$

Записывая первое уравнение системы (5) для нестационарного случая, имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial r} + g\frac{\partial h}{\partial r} = 0. \quad (16)$$

Поскольку скорость потока V можно представить как изменение потенциальной функции вдоль радиуса его растекания $V = \frac{\partial\varphi}{\partial r}$, в итоге получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(rhV)}{\partial r} = q(t). \\ \frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2g} + h = H(t). \end{cases} \quad (17)$$

Первое уравнение системы (17) соответствует уравнению неразрывности потока, $q(t)$ — приток жидкости в начальном радиусе $r = r_0$ радиального потока. Второе уравнение системы (17) — уравнение движения жидкости, $H(t)$ — постоянная в интеграле Коши-Лагранжа в момент времени t. Систему (17) необходимо дополнить начальными и краевыми условиями.

В качестве примера рассмотрим вычисление относительных значений текущей глубины русла и относительной скорости потока в безнапорном радиальном стационарном потоке. Расчеты в среде *MathCad* приведены ниже.

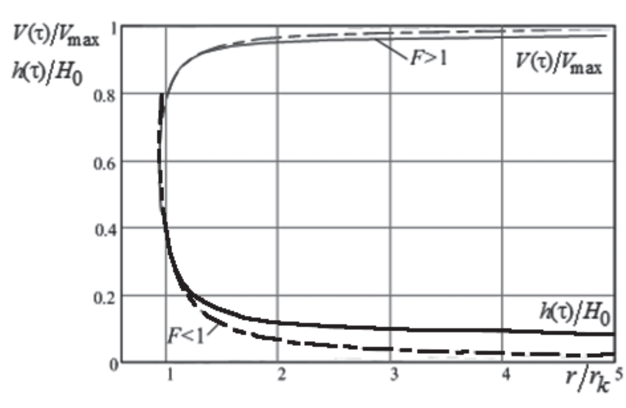

Рис. 3. Изменение глубин (толстая линия) и скоростей (тонкая линия) в радиальном безнапорном потоке. Сплошной график соответствует значениям числа Фруда $F > 1$, пунктирный график — $F < 1$

Выводы. В данной статье сформулирована и поставлена задача определения параметров растекания двухмерного в плане потенциального радиального открытого водного потока. Рассмотрен случай нестационарного водного потока с неопределенной радиальной границей. Получены зависимости изменения глубин и скоростей в безнапорном радиальном потоке. Установлено, что радиальный поток может существовать как при бурном, так и спокойном режимах.

Литература

1. *Емцев Б.Т.* Двухмерные бурные потоки [Текст] / Б.Т. Емцев. — М.: Энергия, 1967. — 212 с.
2. *Коханенко В.Н.* Моделирование бурных двухмерных в плане водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко [и др.] / под общ. ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во Южного федерального университета, 2013. — 180 с.
3. *Коханенко В.Н.* Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общ. ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. — 168 с.
4. K*okhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Two-dimensional motion equations in water flow zone / International Scientific Conference on Construction and Architecture: Theory and Practice for the Innovation Development 2019, CATPID 2019; Kislovodsk; Russian Federation; 1—5 October 2019; Код 156794 // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 698. 066026. DOI: 10.1088/1757-899X/698/6/066026.
5. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* A System of Equations for Potential Two-Dimensional In-Plane Water Courses and Widening the Spectrum of Its Analytical Solutions / 15th International Scientific-Technical Conference on Dynamics of Technical System, DTS 2019; Don State Technical University Rostov-on-Don; Russian Federation; 11—13 September 2019; Код 156214 // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2188, 050017 — DOI: 10.1063/1.5138444.
6. *Чертоусов М.Д.* Специальный курс гидравлики [Текст] / М.Д. Чертоусов. — М.: Гос. энергетическое изд., 1962. — 630 с.

References

1. Emcev B.T. *Dvuhmernye burnye potoki* [Two-dimensional stormy streams]. Moscow: Energiya Publ., 1967. 212 p.
2. Kohanenko V.N., Volosuhin Ya.V. *Modelirovanie burnyh dvuhmernyh v plane vodnyh potokov* [Modeling of stormy two-dimensional in terms of water flows]. Rostov-on-Don: Yuzhnij federal'nij universitet Publ., 2013. 180 p.
3. Kohanenko, V.N. *Modelirovanie odnomernyh i dvuhmernyh otkrytyh vodnyh potokov* [Modeling of one-dimensional and two-dimensional open water flows]. Rostov-on-Don: YuFU Publ., 2007. 168 p.
4. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. Two-dimensional motion equations in water flow zone / International Scientific Conference on Construction and Architecture: Theory and Practice for the Innovation Development 2019, CATPID 2019; Kislovodsk; Russian Federation; 1—5 October 2019; Kod 156794 // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. 2019. Vol. 698. 066026. DOI: 10.1088/1757-899X/698/6/066026.
5. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. A System of Equations for Potential Two-Dimensional In-Plane Water Courses and Widening the Spectrum of Its Analytical Solutions / 15th International Scientific-Technical Conference on Dynamics of Technical System, DTS 2019; Don State Technical University Rostov-on-Don; Russian Federation; 11—13 September 2019; Kod 156214 // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2188, 050017. DOI: 10.1063/1.5138444.
6. Chertousov M.D. *Special'nyj kurs gidravliki* [Special hydraulics course]. Moscow: Gosudarstvennoe energeticheskoe Publ., 1962. 630 p.