НАУЧНАЯ МЫСЛЬ
СЕРИЯ ОСНОВАНА В 2008 ГОДУ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Межрегиональная ассоциация образовательных организаций высшего образования

С.О. Крамаров, Ю.А. Смирнов,
С.В. Соколов, В.Н. Таран

СИСТЕМНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО-АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Монография

Москва
РИОР
ИНФРА-М

УДК 519.7:303.732.4:330.44
ББК 32.81+22.18+65.05
К77

ФЗ № 436-ФЗ	Издание не подлежит маркировке в соответствии с п. 1 ч. 2 ст. 1

Научные редакторы:
Соколов Сергей Викторович — д-р техн. наук, профессор;
Крамаров Сергей Олегович — д-р физ.-мат. наук, профессор

Рецензенты:
Колесников А.А. — д-р техн. наук, профессор, заслуженный деятель науки и техники РФ;
Безуглов Д.А. — д-р техн. наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ

Крамаров С.О., Смирнов Ю.А., Соколов С.В., Таран В.Н.
К77 Системные методы анализа и синтеза интеллектуально-адаптивного управления: Монография. — М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017. — 238 с. + Доп. материалы [Электронный ресурс; Режим доступа http://www.znanium.com]. — (Научная мысль). — www.dx.doi.org/10.12737/19591.

ISBN 978-5-369-01571-1 (РИОР)
ISBN 978-5-16-012195-6 (ИНФРА-М, print)
ISBN 978-5-16-105045-3 (ИНФРА-М, online)

В монографии предлагаются методы системного анализа стохастических обыкновенных и распределенных дифференциальных систем, а также системного синтеза интеллектуально-адаптивного управления на основе принципов Р. Беллмана и Л.С. Понтрягина.

Предназначена для научных работников, аспирантов, магистров и инженеров, специализирующихся в области интеллектуально-адаптивного управления.

УДК 519.7:303.732.4:330.44
ББК 32.81+22.18+65.05

Материалы, отмеченные знаком , доступны в электронно-библиотечной системе ZNANIUM по адресу http://znanium.com. Ссылку для доступа вы можете получить при сканировании QR-кода, размещенного на обложке

ISBN 978-5-369-01571-1 (РИОР)
ISBN 978-5-16-012195-6 (ИНФРА-М, print)
ISBN 978-5-16-105045-3 (ИНФРА-М, online)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на бурные успехи теории адаптивного и стохастического управления за последнее тридцатилетие, создающие зачастую иллюзию ее завершенности, за рамками полного теоретического разрешения остаются еще многие вопросы управления динамическими системами в условиях неопределенности.

Представленная работа предназначена для восполнения существующего пробела в направлении развития как теории управления стохастическими нелинейными объектами на основе общих форм вероятностных критериев, так и аналитического синтеза общих объективных законов процессов управления нелинейными многомерными и многосвязными системами. Это – законы обратных связей, синтезируемых на основе наиболее полных нелинейных моделей систем с непосредственным учетом их естественных закономерностей, физических (химических и др.) критериев и ограничений.

Существующие подходы к синтезу стохастического и адаптивного управления формируют его в функции текущего состояния объекта управления и не учитывают его структурные изменения. Решение этой проблемы возможно только при комбинированном синтезе адаптивного управления с прогнозированием в «малом» и оптимального управления в «большом». При этом принципиально необходимо использовать текущие системные стохастические оценки состояния и управления объекта изменяемой структуры.

В монографии рассмотрен системный синтез интеллектуально-адаптивного управленияяна основе принципов Беллмана и Понтрягина, подробно изложены методы системного анализа, управления и оценки состояния сосредоточенных и распределенных стохастических систем по различным критериям.

Изложенные в книге результаты могут найти практическое применение при создании перспективных систем управления, навигации, связи и т.д., т.е. широкого класса динамических нелинейных систем, функционирующих в условиях возмущений различной физической природы.

1. СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ КРИТЕРИЕВ

1.1. Математическое описание объекта управления

В современной теории оптимального стохастического управления основными объектами исследования являются нелинейные стохастические системы, описываемые векторными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{\xi} = f(\xi, U, t) + f_0(\xi, U, t) n_t,$$

где ξ – N-мерный вектор состояния системы;
f, f_0 – известные нелинейные векторная и матричная функции размерности N и $N*M$ соответственно;
n_t – M-мерный вектор нормированного белого гауссовского шума;
U – $K\le N$-мерный вектор управления (здесь и далее использована симметризованная форма записи уравнений).

В большинстве практических случаев функция f_0 от UT не зависит, а f может быть представлена как $f(\xi, U, t) = f(\xi, t) + U(\xi, t)$, т.е. система уравнений, используемая далее для описания исследуемых объектов, имеет следующий вид:

$$\dot{\xi} = f(\xi, t) + U(\xi, t) + f_0(\xi, t) n_t. \tag{1.1}$$

В силу теоремы Дуба вектор ξ является марковским [160], а плотность его распределения $\rho(\xi, t)$ описывается известным уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), которое для удобства последующего использования запишем в виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho(\xi,t)}{\partial t} = L\{\rho(\xi,t)\} = -div\left\{\left[f + U + \frac{1}{2}\frac{\partial f_0}{\partial\xi}\left(f_0^T\right)^{(V)}\right]\rho\right\} + \\ + \frac{1}{2} div\left\{\overline{div}\left[f_0 f_0^T \rho\right]\right\},\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $L\{U, f, f_0, \rho\}=L_0\{\rho\} - div[U\rho]$ – оператор ФПК, $L_0\{\rho\}= L\{0, f, f_0, \rho\}$;
$(A)^{(V)}$ – операция преобразования матрицы A размерности $n*m$ в вектор $(A)^{(V)}$, формируемый из ее элементов следующим образом:

$$A^{(V)} = \left|a_{11}a_{21}\ldots a_{m1}a_{12}a_{22}\ldots a_{m2}\ldots a_{1n}a_{2n}\ldots a_{mn}\right|^T, \tag{1.3}$$

$\overline{div}$ – символ операции дивергенции строки матрицы.

Если возможно наблюдение управляемого вектора ξ с помощью измерителя, описываемого в общем случае нелинейным стохастическим уравнением вида

$$Z = H(\xi, t) + W_t, \tag{1.4}$$

где Z – $L \leq N$-мерный вектор выходных сигналов измерителя;
$H(\xi,t)$ – известная нелинейная вектор-функция наблюдения размерности L;
W_t – белый гауссовский вектор-шум измерения размерности L с нулевым средним и матрицей интенсивности $Dw(t)$;

то для вероятностного описания вектора состояния ξ более целесообразно использование апостериорной плотности вероятности (АПВ) $\rho_z(\xi,t)$, задаваемой уравнением Стратоновича:

$$\frac{\partial \rho_Z(\xi,t)}{\partial t} = L\{\rho_Z(\xi,t)\} + [F(\xi,t) - F(t)]\rho_Z(\xi,t) = L\{\rho_Z\} + S\{\rho_Z, \xi, t\}, \tag{1.5}$$

где

$$F(\xi,t) = -\frac{1}{2}[Z - H(\xi,t)]^T D_W^{-1}[Z - H(\xi,t)], \; F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,t)\rho_z(\xi,t)d\xi,$$

в силу того, что энтропия апостериорного сообщения меньше энтропии априорного.

Так как аналитических методов решения уравнений (1.2), (1.5) в настоящее время не существует, а реализация численных методов с использованием существующих вычислительных средств при $N \geq 3$ не представляется достаточно эффективной [147], то наибольшее распространение при анализе вероятностных характеристик вектора состояния ξ получили методы функциональной аппроксимации плотности [28]. И наиболее распространенный среди них – метод аппроксимации гауссовской плотностью

$$\rho(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det P}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\xi - \hat{\xi}\right)^T P^{-1}\left(\xi - \hat{\xi}\right)\right\}, \tag{1.6}$$

где $\hat{\xi} = \hat{\xi}(t)$ – математическое ожидание вектора состояния ξ;
$P = P(t)$ – матрица ковариаций,

позволяющий сформировать аппроксимацию решений уравнений с частными производными вида (1.2, 1.5) в виде решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно параметров $\hat{\xi}$, P искомых плотностей.

Наряду с традиционными достоинствами метода гауссовской аппроксимации [160], следует также отметить свойство плотности (1.6) минимизировать информационный функционал Фишера при условии существования конечной матрицы P [119]. Это, в свою очередь, позволяет решать на основе аппроксимации (1.6) задачи стохастического управления и оценивания в минимаксной постановке – искать оптимум заданного функционала при минимуме информации о векторе состояния ξ [119].

В самом распространенном на практике варианте уравнений оценки, так называемом обобщенном (расширенном) нелинейном гауссовском фильтре, уравнения оценки вектора состояния (1.1) имеют вид

$$\dot{\hat{\xi}} = f + U + K\left(\hat{\xi}, t\right)\left(z - H\left(\hat{\xi}, t\right)\right), \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} K\left(\hat{\xi}, t\right) &= P \frac{\partial^T H}{\partial \hat{\xi}} D_w^{-1}, \\ \dot{P} &= P \frac{\partial}{\partial \hat{\xi}} \left(f + U\right)^T + \frac{\partial}{\partial \hat{\xi}} \left(f + U\right) P + f_0 \, f_0^T - K D_w K^T. \end{aligned} \tag{1.8}$$

При аналогичной аппроксимации решения уравнения ФПК, т.е. априорной плотности вероятности, уравнения векторных параметров плотности получаются из (1.7, 1.8) при $H = 0$.

Приведенные уравнения являются исходными при последующем синтезе оптимальных управлений.

Для возможности окончательной постановки задачи синтеза рассмотрим далее виды критериев оптимальности, обеспечивающих формирование стохастических управлений в наиболее общем случае оптимизации процесса управления системой.

1.2. Критерии оптимизации

Решение проблемы синтеза оптимального управления стохастическими объектами осуществляется в настоящее время на основе использования методов, изначально разработанных для детерминированных систем [1]. Данное обстоятельство неизбежно приводит к стохастическому характеру известных критериев оптимизации и функций оптимальности (Гамильтона или Беллмана) и, как следствие, к необходимости рассмотрения средних значений [1, 28]. Это, в свою очередь, определяет интегральную зависимость оптимального управления от плотности распределения вектора состояния, требуя, в конечном итоге, решения двухточечной краевой задачи для системы уже не обыкновенных дифференциальных, а интегро-дифференциальных уравнений совместно с интегро-дифференциальным уравнением в частных производных для неизвестной плотности распределения параметров состояния. Очевидные трудности решения такой системы привели к использованию единственной на сегодняшний день возможности ее приближенного интегрирования на основе гауссовской аппроксимации функции плотности. Но подобная аппроксимация порождает ошибки не только в определении самой плотности распределения, но и требует статистической линеаризации уравнений объекта, приводящей к дополнительным ошибкам решения двухточечной краевой задачи. Кроме того, существующие подходы не позволяют использовать в качестве критериев оптимизации обобщенные формы вероятностных критериев, нелинейно зависящих непосредственно от плотности распределения (критерий минимума энтропии вектора состояния, критерий Кульбака и др.) и определенных в общем случае в замкнутой области существования параметров состояния.

В связи с этим возникает проблема разработки такого подхода к синтезу оптимального управления стохастическими объектами, который, во-первых, позволял бы построить закон управления в замкнутой форме при самой общей нелинейной зависимости критерия оптимизации от плотности распределения вектора состояния, и, во-вторых, позволил бы избежать ошибок статистической линеаризации уравнений объекта.

Для возможности дальнейшего решения задачи поиска подобного оптимального управления критерий оптимизации запишем в следующей наиболее общей форме:

$$J = \int_T \int_{\xi_*} \Phi\left[\rho(\xi,t), U(\xi,t)\right] d\xi\, dt = \int_T W_*(t)\, dt, \qquad (1.9)$$

где Φ – известная нелинейная функция, учитывающая в общем случае возможные аналитические ограничения на вектор управления;
$T = [t_0, t_k]$ – временной интервал оптимизации;
ξ_* – некоторое ограниченное множество параметров состояния.

На практике чаще используется более простая форма критерия оптимальности

$$J = \int_T \int_{\xi_{(1)}} \Phi_1\left[\rho(\xi,t)\right] d\xi\, dt + \int_T \int_{\xi_{(2)}} \Phi_2\left[U(\xi,t)\right] d\xi\, dt = \int_T W_*(t)\, dt, \qquad (1.10)$$

где Φ_i, $i = 1,2$ – известные нелинейные аналитические функции;
ξ_i – области пространства состояний, в которых определяется оптимальное управление;

достаточно адекватно отражающая естественное формирование условия, обеспечивающего оптимальность исследуемой системы как в смысле точности, так и затрат на управление.

При этом различные вариации вида функции Φ_1 позволяют охватить достаточно широкий класс условий оптимальности по точности:

– максимума (минимума) вероятности существования вектора ξ в области $\xi_{(1)}$: $\Phi_1(\rho) = \pm\rho$;

– минимума отклонения искомой плотности вероятности ρ от заданной g: $\Phi_1(\rho) = (\rho - g)^2$, $\Phi_1(\rho) = |\rho - g|$, $\Phi_1(\rho) = -\rho \ln\left(\frac{g}{\rho}\right)$ (критерий Кульбака) и т.д.;

– максимума информации о векторе состояния ξ:

$$\Phi_1(\rho) = \rho\left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial \xi}\right]\left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial \xi}\right]^T$$ (критерий Фишера) и др.,

а функции Φ_2 – условий оптимальности по текущим затратам на регулирование (энергетическое обеспечение) процесса (как правило, функция Φ_2 выбирается возрастающей положительно определенной: квадратичной $\Phi_2(U) = U^T D U$ или экспоненциальной $\Phi_2(U) = \exp(\alpha^T U)$, где D, α – матрица и вектор известных постоянных коэффициентов [147]).

Наряду с критерием (1.10) далее будем использовать его модификацию, обеспечивающую синтез оптимального управления не на конечном (замкнутом) интервале времени T, а в реальном (текущем) масштабе времени движения

$$J_1 = \int\limits_{\xi(1)} \Phi_1[\rho(\xi,t)]d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\xi(2)} \Phi_2[U(\xi,t)]d\xi\, dt. \qquad (1.11)$$

Данный критерий традиционен для задач управления в реальном времени (например, подвижными объектами) и называется ***локальным*** [28] (в отличие от **терминального** (***глобального***) критерия (1.10)). Оптимальное управление U^*, формируемое на его основе, называется *локально-оптимальным*. Существенным преимуществом применения критерия (1.11) является простота синтезируемого на его основе управления, позволяющая легко реализовать алгоритмы локально-оптимального управления непосредственно на борту подвижного объекта. В заключение следует также отметить, что форма критериев (1.10), (1.11) охватывает одну из возможных постановок задачи управления процессами самоорганизации – при выборе в качестве первой составляющей критерия энтропии системы или критерия Фишера. В этом случае поиск управления, оптимизирующего энтропию системы, представляет собой, по существу, формирование ее параметров, обеспечивающих оптимальное протекание процесса самоорганизации.

1.3. Априорное оптимальное управление вектором состояния

1.3.1. Постановка задачи

В отличие от традиционной постановки задачи синтеза стохастического оптимального управления – на основе усредненного функционала и дифференциальных моделей математического ожидания вектора состояния, использование критерия типа (1.9) предполагает поиск управления уже не самим процессом, а его плотностью распределения $\rho(\xi,t)$. В свою очередь, функция ρ в отличие от вектора ξ описывается дифференциальным уравнением с частными производными (а в случае (1.5) даже интегро-дифференциальным), что требует привлечения математического аппарата синтеза управления системами уже с распределенными параметрами. Теория подобного синтеза в настоящее время разработана достаточно подробно [18] и базируется, в основном, на применении двух методов – динамического программирования и принципа максимума, обобщенных на случай распределенных систем. Для дальнейших построений используем метод динамического программирования: во-первых, в силу его более общего характера, а, во-вторых, большей универсальности и простоты синтеза оптимального управления.

Кроме того, процедуру формирования оптимального управления рассмотрим в двух принципиально различных случаях – для ненаблюдаемого объекта управления (1.1) и наблюдаемого с использованием нелинейного измерителя вида (1.4), когда решение задачи синтеза является, по существу, решением проблемы дуального управления [171] в наиболее общем (замкнутом) виде.

Для простоты последующего изложения управление в первом случае определим как априорное, во втором – как апостериорное.

1.3.2. Синтез априорного оптимального управления

Для иллюстрации общности предложенного подхода к синтезу стохастического управления рассмотрим формирование вектора U, оптимизирующего нелинейный функционал J (1.9).

Оптимальное управление будем искать в классе ограниченных непрерывных функций со значениями из открытой области U_*. Для его построения используем метод динамического программирования, согласно которому задача сводится к решению функционального уравнения [18]

$$\min_{U\in U_*}\left\{\frac{dV}{dt}+W_*\right\}=0, \tag{1.12}$$

при конечном условии $V(t_К) = 0$ относительно оптимального функционала V, параметрически зависящего от времени $t \in T$ и определенного на множестве функций ρ, удовлетворяющих уравнению (1.2).

Для линейных систем с распределенными параметрами, к классу которых относятся уравнения типа (1.2), функционал отыскивается в виде интегральной квадратичной формы [18]

$$V = \int_{\xi} \nu(\xi,t)\rho^2(\xi,t)d\xi ,$$

откуда имеем

$$\frac{dV}{dt} + W_* = \int_{\xi} \left\{ \frac{d\nu}{dt}\rho^2 + 2\nu\rho L_0\{\rho\} + \Phi[\rho,U] - 2\nu\rho \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i}\rho + u_i \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} \right) \right\} d\xi , \quad (1.13)$$

где индекс "i" используется для обозначения компонентов соответствующих векторов.

Анализ полученного выражения показывает, что определение вектора $U(\xi,t)$ из решения функционального уравнения (1.12) сводится к классической задаче отыскания вектор-функции, реализующей минимум определенного интеграла (1.13). При этом вектор-функция $U(\xi,t)$, являющаяся решением данной задачи, должна удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left[2\nu\rho^2\right] - \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} + 2\nu\rho\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,N ,$$

или

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial U}\right)^T = -\rho\frac{\partial}{\partial \xi}\left[2\nu\rho\right]^T . \quad (1.14)$$

В общем случае (1.14) представляет собой систему нелинейных уравнений относительно компонентов вектора управления, допускающую аналитическое разрешение только в некоторых частных случаях, например, когда функция $\Phi[\rho,U]$ имеет следующий вид:

$$\Phi = \Phi_1[\rho] + \Phi_2[U],$$

где $\Phi_{2(1)}$ – аналитические функции, первые производные которых допускают обращение,

или, например,

$$\Phi = \Phi_1[\rho] + \left[U(\xi,t) - U_0(\xi,t)\right]^T D_U(\xi,t)\left[U(\xi,t) - U_0(\xi,t)\right],$$

где $D_U(\xi,t)$ – известная симметричная квадратная матрица;

$U_0(\xi,t)$ – известный вектор.

В последнем случае использование квадратичной формы вектора U обуславливается, как правило, требованием обеспечения минимального отклонения формы искомого управления от заданного вектора U_0, определяемого, в свою очередь, возможностями технической реализации управления. При этом уравнение (1.14) разрешается относительно U следующим образом:

$$U_{\text{опт}} = U_0 - \rho D_U^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(2\nu\rho)\right]^T.$$

Подстановка найденного закона оптимального управления в (1.2) и (1.3) (при учете условия $dV/dt + W_* = 0$, формируемого при оптимальном управлении $U_{\text{опт}}$ [18]) позволяет построить систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = L_0\{\rho\} - A(\rho,\nu), \qquad \rho(\xi, t_0) = \rho_0,$$

$$A(\rho,\nu) = \sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left\{\left(U_0 - \rho D_U^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(2\nu\rho)\right]^T\right)_{(i)} \rho\right\},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial t} = -2\nu\rho^{-1}L_0\{\rho\} - \Phi_1[\rho]\rho^{-2} - \left[\frac{\partial}{\partial \xi}(2\nu\rho)\right]D_U^{-1} \times \\ \times\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(2\nu\rho)\right]^T + 2\nu\rho^{-1}A(\rho,\nu), \qquad \nu(\xi, t_k) = 0,\end{aligned} \tag{1.15}$$

индекс iвведен для обозначения i-го компонента вектора.

Очевидно, что решение этой системы исчерпывает, по существу, теоретическое принципиальное решение поставленной задачи.

1.3.3.Анализ путей вычислительной реализации оптимального управления

С точки зрения точности и сложности формирования оптимального управления интересен сравнительный анализ решения системы (1.15) и системы сопряженных уравнений, получаемых при использовании традиционного подхода [1, 29]. Если в случае (1.15) оптимальное управление зависит от плотности ρ пропорционально-дифференциально, то управление, полученное традиционно, зависит от ρ интегрально, что приводит для N-мерного вектора состояния к необходимости совместного интегрирования ($2N$+1)-мерной системы сопряженных обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений и интегро-дифференциального уравнения в частных производных для N-мерной функции ρ, что существенно сложнее решения системы для уравнений в частных производных (1.15). Тем не менее, от этого сложность решения системы (1.15), общих методов точного аналитического решения которой в настоящее время не существует, не уменьшается. Не останавливаясь на многочисленных приближенных методах решения этой задачи, ориентированных на компромисс между необходимой точностью и объемом вычислительных затрат, в качестве одного из методов решения этой проблемы рассмотрим далее метод, основанный на разложении функций v и ρ в ряд по некоторой системе ортонормированных функций векторного аргумента:

$$\nu(\xi,t)=\sum_{\mu}\alpha_{\mu}(t)\varphi_{\mu}(\xi)=\varphi^{T}\alpha,$$

$$\rho(\xi,t)=\sum_{\mu}\beta_{\mu}(t)\varphi_{\mu}(\xi)=\varphi^{T}\beta,$$

где μ – индекс, пробегающий множество значений от (0,...,0) до (M,...,M);
φ – вектор ортонормированных функций аргумента ;
α, β – векторы коэффициентов соответствующих разложений.

В этом случае решение сводится к решению двухточечной краевой задачи интегрирования системы следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\beta}=\int_{\xi}\varphi L_0\left[\varphi^T\beta\right]d\xi-\int_{\xi}\varphi A\left(\varphi^T\beta,\varphi^T\alpha\right)d\xi,$$

$$\dot{\alpha}=\int_{\xi}\varphi\left\{-2\varphi^T\alpha\left(\varphi^T\beta\right)^{-1}L_0\left[\varphi^T\beta\right]-\Phi_1\left[\varphi^T\beta\right]^{-2}-\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\varphi^T\alpha\varphi^T\beta\right)\right]D_U^{-1}\times\right. \quad (1.16)$$

$$\left.\times\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\varphi^T\alpha\varphi^T\beta\right)\right]^T+2\varphi^T\alpha\left(\varphi^T\beta\right)^{-1}A\left(\varphi^T\beta,\varphi^T\alpha\right)\right\}d\xi,$$

при краевых условиях $\alpha(t_K)=0,\quad \beta(t_0)=\beta_0$, причем, значения компонентов β_0 определяются из разложения функции $\rho(\xi,t_0)=\rho_0$.

С точки зрения практической реализации интегрирование системы (1.16) при краевых условиях оказывается проще, чем интегрирование (1.15), но с точки зрения организации процесса оценивания в реальном времени по-прежнему остается весьма трудновыполнимой задачей. Более того, целесообразность такого прямого подхода весьма сомнительна по следующим причинам. Во-первых, оказывается весьма велик объем необходимых временных и вычислительных затрат, во-вторых, исключается возможность настройки вектора U в реальном времени, и, в-третьих, в процессе приборной реализации, как правило, все равно не удается выдержать точно заданные значения U.

Таким образом, в данном случае вполне обосновано использование приближенных методов решения задачи (1.16), в качестве одного из которых рассмотрим метод инвариантного погружения [155], обеспечивающий приближенное решение в реальном масштабе времени.

Так как применение данного метода предполагает задание всех составляющих искомого приближенно оцениваемого вектора в дифференциальной форме, то для реализации возможности синтеза в реальном времени вектора U при использовании данного метода, введем фиктивную переменную ϑ, позволяющую в дальнейшем учесть выражение $U_{\text{опт}}$ в виде дифференциального уравнения

$$\dot{\vartheta} = U_{\text{опт}}\left(\varphi^T\alpha, \varphi^T\beta\right),$$

образующего с уравнениями (1.16) единую систему. Применение приближенного метода инвариантного погружения приводит в этом случае к следующей системе уравнений [155]:

$$\begin{vmatrix} \dot{\hat{\vartheta}} \\ \dot{\hat{\beta}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_0 \\ \int\limits_{\xi} \varphi B\left(\varphi^T\hat{\beta}, U_0\right) d\xi \end{vmatrix} - D\int\limits_{\xi} \varphi \Phi_1\left[\varphi^T\hat{\beta}\right]\left(\varphi^T\hat{\beta}\right)^{-2} d\xi,$$

$$\begin{aligned}\dot{D} = {}& 2\int\limits_{\xi} \varphi\left\{\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}} B\left(\varphi^T\hat{\beta}, U_0\right)\right\} d\xi D + \\ &+ D\int\limits_{\xi} \varphi\left\{2\varphi^T\left(\varphi^T\hat{\beta}\right)^{-1} B\left(\varphi^T\hat{\beta}, U_0\right)\right\} d\xi + \\ &+ \int\limits_{\xi} \varphi\left\{\sum_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\left[\left[\varphi^T\hat{\beta}\right] D_U^{-1} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(2\varphi^T\left[\varphi^T\hat{\beta}\right]\right)\right]_{(i)} \varphi^T\hat{\beta}\right)\right\} d\xi - \\ &- 2D\int\limits_{\xi} \varphi\left\{\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}\left[\Phi_1\left[\varphi^T\hat{\beta}\right]\left(\varphi^T\hat{\beta}\right)^{-2}\right]\right\} d\xi D,\end{aligned}$$

$$B\left(\varphi^T\hat{\beta}, U_0\right) = L_0\left[\varphi^T\hat{\beta}\right] - \sum_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left[u_{0(i)}\varphi^T\hat{\beta}\right].$$

Матрица D в методе инвариантного погружения играет роль весовой матрицы при отклонении вектора приближенного решения от оптимального, поэтому в данном случае для переменных $\hat{\beta}_i$ соответствующие компоненты D характеризуют степень их отклонения от коэффициентов разложения истинной плотности (компоненты D_0, соответственно – отклонения параметров в начальный момент). Существенным достоинством рассмотренного подхода, несмотря на формирование приближенного решения, является возможность синтеза оптимального управления $U_{\text{опт}}$ в реальном времени.

Для иллюстрации эффективности использования предложенного подхода рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Объект управления описывается уравнением

$$\dot{\xi} = -a\xi^3 + U + n, \qquad \xi(t_0) = 0,$$

где $n(t)$ – белый центрированный гауссовский шум интенсивности D_n.

Синтез управления будем осуществлять исходя из условия минимального отклонения координаты x от начального состояния $\xi(t_0)$ на интервале $T = [t_0, t_k]$ при минимуме затрат на управляющее воздействие. Традиционный подход позволяет решить данную задачу на основе среднеквадратичного критерия [29]

$$J_1 = M\left\{\int_{t_0}^{t_k}\left[\xi^2(\tau) + K^2U^2(\tau)\right]d\tau\right\}, \qquad K = const,$$

а разработанный – на основе критерия обеспечения максимума вероятности существования ξ в заданноминтервале $\xi_* = [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ (который в силу неравенства Чебышева позволяет обеспечить потенциально большую точность управления переменной ξ), т.е. на основе минимизации критерия

$$J_2 = \int_{\xi_*}\int_{t_0}^{t_k}\left[-\rho(\xi,\tau) + K^2U^2(\xi,\tau)\right]d\tau d\xi .$$

В первом случае оптимальное управление определяется как [29]

$$U_{\text{опт}} = \frac{1}{2K^2}M[\lambda] = \frac{1}{2K^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\rho(\xi,\lambda,\tau)\,d\lambda\, d\xi ,$$

где λ – сопряженная переменная;

а система канонических сопряженных уравнений, вытекающая из стохастического гамильтониана, имеет вид

$$\dot{\xi} = -a\xi^3 + U_{\text{опт}} + n_t, \qquad \xi(t_0) = \xi_0,$$
$$\dot{\lambda} = 3a\lambda\xi^2 + 2\xi, \qquad \lambda(t_k) = 0,$$

что позволяет записать уравнение для плотности $\rho = \rho(\xi, \lambda, t)$ следующим образом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\frac{1}{2K^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\rho\, d\xi\, d\lambda - a\xi^3\right)\rho\right] + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\left(3a\lambda\xi^2 + 2\xi\right)\rho\right]\right\} + \frac{D_n}{2}\frac{\partial^2\rho}{\partial\xi^2}. \quad (1.17)$$

Следовательно, точное решение поставленной задачи сводится в данном случае к решению интегро-дифференциального уравнения (1.17), причем, с неопределенными краевыми условиями (в силу одновременной неопределенности переменных ξ и λ в моменты времени, соответственно, t_0 и t_k). Последнее обстоятельство приводит к принципиальной невозможности точного синтеза статистически оптимального управления на основе традиционного подхода (в отличие от разработанного). Классическим путем устранения данного противоречия является гауссовская аппроксимация плотности $\rho(\xi,\lambda,t)$, приводящая в рассматриваемом случае к сопряженной системе для оценок средних:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}} &= -a\hat{\xi}^3 + \frac{1}{2K^2}\hat{\lambda}, \qquad \hat{\xi}(t_0) = M(\xi_0) = 0, \\ \dot{\hat{\lambda}} &= 3a\hat{\lambda}\hat{\xi}^2 + 2\hat{\xi}, \qquad \hat{\lambda}(t_k) = 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Интегрирование системы (1.18) представляет собой решение двухточечной краевой задачи, поэтому для возможности формирования управления в реальном масштабе времени используем метод приближенного инвариантного погружения, приводящий к уравнением для приближенной оценки:

$$\dot{\hat{\xi}}_* = -a\hat{\xi}_*^3 + 2D\hat{\xi}_*, \qquad \dot{D} = 4D^2 - 9aD\hat{\xi}_*^2 - \frac{1}{2K^2},$$

откуда определяется приближенный закон управления

$$\hat{U}_{\text{опт}} = 2\hat{\xi}_* D.$$

Предложенный выше альтернативный подход, в свою очередь, позволяет сформировать приближенный закон управления в виде правой части уравнения переменной ϑ, составляющего единую систему с уравнениями вектора приближенных коэффициентов β разложения плотности $\rho(\xi,t)$ по ортонормированной системе функций φ:

$$\left|\begin{matrix}\dot{\hat{\vartheta}}\\ \dot{\hat{\beta}}\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}0\\ \int\limits_{\xi_*}\varphi\left\{B_1(\varphi,\xi)\hat{\beta}+3\xi^2 a\varphi^T\hat{\beta}\right\}d\xi\end{matrix}\right| + D\int\limits_{\xi_*}\varphi\left(\varphi^T\hat{\beta}\right)^{-1}d\xi,$$

$$\dot{D} = 2\int\limits_{\xi_*}\varphi\left\{B_1(\varphi,\xi)+3\xi^2 a\varphi^T\right\}d\xi D +$$

$$+2D\int\limits_{\xi_*}\varphi\left\{\varphi^T\left(B_1(\varphi,\xi)\hat{\beta}\left(\varphi^T\hat{\beta}\right)^{-1}+3a\xi^2\right)\right\}d\xi +$$

$$+\frac{2}{K^2}\int\limits_{\xi_*}\varphi\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left(\varphi^T\hat{\beta}\right)^2\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi\left[\varphi^T\hat{\beta}\right]\right)\right\}\right]d\xi -$$

$$-2D\int\limits_{\xi_*}\varphi\varphi^T\left(\varphi^T\hat{\beta}\right)^{-2}d\xi D,$$

$$B_1(\varphi,\xi) = \frac{D_n}{2}\frac{\partial^2\varphi^T}{\partial\xi^2} + a\xi^3\cdot\frac{\partial\varphi^T}{\partial\xi}. \qquad (1.18)$$

С целью сравнительной оценки точности обоих подходов было проведено численное моделирование субоптимального (полученного на основе метода приближенного инвариантного погружения) управления рассмотренным объектом при

$$a = K = 1;\quad D_n = 1{,}7;\quad \xi_0 = 0;\quad \xi_* = [-2{,}3;\, 2{,}3];\quad T = [0,\, 100]\text{с};$$
$$\varphi = \left|\cos(\omega_0\xi)\sin(\omega_0\xi)\cos(2\omega_0\xi)\sin(2\omega_0\xi)\right|^T,\ \omega_0 = \pi/2.3,$$

реализованного для 30 стохастических траекторий движения объекта.

Интегрирование уравнений осуществлялось методом Рунге-Кутты третьего порядка с шагом 0,03 с. Оценка точности управления производилась путем усреднения по ансамблю реализаций среднемодульных отклонений отдельно взятых траекторий движения от границ интервала ξ_* в течение времени T. По окончании моделирования было установлено, что точность управления на основе разработанного подхода выше традиционного более чем в 2 раза, что, в свою очередь, позволяет сделать вывод о возможности эффективного использования предложенного метода при синтезе управления стохастическими объектами.

1.3.4. Субоптимальное априорное стохастическое управление

Несмотря на достигнутую принципиальную возможность построения точного оптимального стохастического управления в самом общем случае, практическое решение задачи такого синтеза сопряжено, как было показано выше, с серьезными вычислительными трудностями. Очевидный путь их преодоления лежит в направлении использования различных методов аппроксимации решений уравнений (1.1), (1.2), один из возможных вариантов которых и рассмотрим далее (анализируя во избежание усложнения построений одномерный случай).

Так как практическая реализация нелинейных функций в аппаратном комплексе объекта (1.1) предполагает, как правило, их предварительную аппроксимацию некоторым конечным функциональным рядом, то с учетом наиболее частого использования для этой цели степенных рядов (рядов Тейлора, интерполяционных многочленов Лагранжа, сплайнов и т.д.) представим исходное уравнение объекта следующим образом:

$$\dot{\xi} = \sum_{i=0}^{N_0} f_i(t)\xi^i + \sum_{i=0}^{N_1} U_i(t)\xi^i + \left(\sum_{i=0}^{N_2} f_{0i}(t)\xi^i\right) n_t, \tag{1.19}$$

где $N_i, i = \overline{0,2}$ – степень ряда, определяемая из условия требуемой точности аппроксимации функций;

f_i , U_i, f_{0i} – коэффициенты разложения в соответствующий ряд;

или в векторной форме ($N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$):

$$\dot{\xi} = \psi(\xi)[F + U + F_0 n],$$
$$\psi(\xi) = \left|1 \xi \xi^2 ... \xi^N\right|, \; F = \left|f_0 ... f_N\right|^T,$$
$$U = \left|U_0 ... U_N\right|^T, \quad F_0 = \left|f_{00} ... f_{0N}\right|^T.$$

В соответствии со сформулированной выше постановкой задачи (1.2) на временном интервале $T = [t_0, t_k]$ требуется определить вектор управления U из условия минимума вероятностного функционала J_0 (1.10), заданного на ограниченном интервале $\xi_*=[\xi_{min}, \xi_{max}]$.

Так как плотность распределения $\rho(\xi, t)$ описывается дифференциальным уравнением в частных производных (ФПК), не имеющим в общем случае аналитического решения, то для возможности дальнейшего синтеза оптимального вектора U используем в (1.10) какое-либо аппроксимирующее представление функции ρ, например, параметрическое.

Методика решения уравнения ФПК на основе различных способов параметрического описания плотности (моментный, семиинвариантный, эллипсоидальный и т.д. [62,147]), является, по существу, единой и состоит в формировании системы дифференциальных уравнений вектора параметров, полностью определяющих искомую плотность. В связи с этим особо следует выделить класс решений, построенных на основе аппроксимации плотностью распределения, класс которой априорно известен. К таким видам аппроксимации относятся, например, аппроксимация распределениями Пирсона [118] и некоторые другие типы аппроксимаций [118, 119], общим преимуществом которых является заранее известная и конечная размерность системы уравнений параметров плотности. Более того, подобный подход (развитый для уравнения Стратоновича, обобщающего уравнение ФПК), в рассматриваемом случае открывает возможность построения (несмотря на параметрическое описание плотности) оптимального с точки зрения минимакса закона управления (применение его особенно актуально в системах с априорной неопределенностью эволюции их параметров, характеристик возмущений и т.д.). Действительно, описание плотности распределения ρ одним из распределений, доставляющих минимум информационному функционалу [119], при минимизации критерия J_0 позволяет решить поставленную задачу в условиях наихудшей информации о плотности, т.е. при минимуме информации о процессе ξ_t обеспечить оптимальное в смысле (1.10) управление им.

Напомним, что использование данного подхода предполагает формирование из бесконечномерной системы уравнений моментов, вытекающих из уравнения (1.2) и имеющих для системы (1.8) вид [118]:

$$\dot{m}_j = \sum_{i=0}^{2N}\left[f_i + \frac{D_n}{2}\sum_{k=0}^{i} f_{0k} f_{0(i-k+1)}(i+1-k)\right] j m_{i+j-1} +$$
$$+\frac{D_n}{2}\sum_{i=0}^{2N} j(j-1)\left(\sum_{k=0}^{i} f_{0k} f_{0(i-k)}\right) m_{i+j-2} + \sum_{i=0}^{N} U_i j m_{i+j-1},$$
$$j = 1,2,\ldots; \qquad m_0 = 1,$$

замкнутой (конечномерной) системы уравнений вектора моментов $M = |m_1 \ldots m_L|^T$ на основании известной для выбранного типа аппроксимирующей плотности распределения $\tilde{\rho}(\xi, M, t)$ функциональной зависимости высших моментов m_j от L низших $m_1 \div m_L : m_j = \varphi(m_1, \ldots, m_L, j)$, замыкающей приведенную систему уравнений. Полученные таким образом уравнения могут быть записаны в следующей векторной форме, удобной для последующего решения задачи:

$$\dot{M} = P(M, F, F_0) + N(M)U, \;\; M(t_0) = M_0, \qquad (1.20)$$

где $M = |m_1 \ldots m_L|^T, P(M, F, F_0)$ – известная нелинейная вектор-функция;

$N(M) = \lfloor i m_{i+j-1} \rfloor (i = \overline{1,L}; j = \overline{0,N})$ – матрица размерности $L\times(N+1)$.

(Как будет показано далее, к подобной форме могут быть приведены и многомерные уравнения традиционного нелинейного фильтра Калмана (1.7), (1.8) при разложении функции управления, аналогичном (1.19). В этом случае оказывается возможной организация уже апостериорного субоптимального управления (т.н. дуального управления), рассматриваемого далее в п.1.4 (при полном сохранении методики, изложенной в данном параграфе)).

В итоге поставленная задача сводится к классической задаче поиска оптимального управления U вектором M, доставляющего минимум функционалу

$$J_* = \int_T \int_{\xi_*} \left\{ \Phi_1\left[\tilde{\rho}(\xi, M, t)\right] + \Phi_2(U, \xi, t) \right\} d\xi \, dt .$$

Используя для решения задачи принцип максимума, запишем соответствующий гамильтониан в виде

$$G(M, U, t) = \int_{\xi_*} \left\{ \Phi_1\left[\tilde{\rho}(\xi, M, t)\right] + \Phi_2(U, \xi, t) \right\} d\xi + \\ + \lambda^T \left[P(M, F, F_0) + N(M) U \right], \qquad (1.21)$$

где λ – вектор сопряженных переменных.

Из выражения (1.21), согласно принципу максимума, легко может быть получено соответствующее выражение для $U_{\text{опт}} = U(M,\lambda)$, определяемое видом функции Φ_2 и характером ограничений, накладываемых на U. Рассмотрим ниже синтез законов оптимального управления для двух случаев, наиболее характерных для практических приложений: квадратичной по U функции $\Phi_2 = U^T K(\xi, t) U$ и когда Φ_2 от U не зависит, а вектор U подчиняется ограничениям $\left|U_j\right| \le A,\ j = \overline{1, L}$.

В первом случае

$$U_{\text{опт}} = -\left[\int_{\xi_*} \left(K^T + K \right) d\xi \right]^{-1} \left(N^T \lambda \right) = S(M, t) \lambda ,$$

во втором

$$U_{\text{опт}} = -A \operatorname{sgn}\left(N^T \lambda \right).$$

Система канонических уравнений принимает при этом вид

$$\dot{M}=P\left(M,F,F_0\right)+N\left(M\right)U_{\text{опт}}\left(M,\lambda\right),$$

$$\dot{\lambda}=-\left[\frac{\partial}{\partial M}\int_{\xi_*}\Phi_1\left[\tilde{\rho}\left(\xi,M,t\right)\right]d\xi\right]^T- \tag{5.22}$$

$$-\left[\frac{\partial P\left(M,F,F_0\right)}{\partial M}+\frac{\partial N\left(M\right)}{\partial M}U_{\text{опт}}\left(M,\lambda\right)\right]^T\lambda, M\left(t_0\right)=M_0, \lambda\left(t_k\right)=0,$$

и решение поставленной проблемы сводится к решению обычной двухточечной краевой задачи.

Следует при этом отметить, что в отличие от традиционного синтеза оптимального управления (с использованием математического ожидания гамильтониана и классических критериев) полученные выражения для $U_{\text{опт}}$ уже не являются интегрально зависящими от плотности распределения, как и правые части канонических уравнений, а сами уравнения описывают непосредственно прямые и сопряженные переменные, а не их математические ожидания, что в целом принципиально упрощает решение. Решение рассматриваемой краевой задачи можно осуществить в настоящее время с помощью известных численных методов со сколь угодно высокой точностью, но такой прямой подход оказывается весьма неэффективным по причинам, изложенным ранее. Таким образом, и в данном случае вполне обосновано использование приближенных методов решения задачи (1.22). Как вариант рассмотрим, по-прежнему, метод инвариантного погружения [155], обеспечивающий искомое приближенное решение в реальном масштабе времени.

Применение данного метода к системе (1.22) позволяет получить следующую систему уравнений, интегрирование которой не вызывает никаких принципиальных затруднений:

$$\dot{\widehat{M}}=P\left(\widehat{M},F,F_0\right)-D\left[\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\int_{\xi_*}\Phi_1\left[\tilde{\rho}\left(\xi,\widehat{M},t\right)\right]d\xi\right]^T,$$

$$\dot{D}=2\left[\frac{\partial P}{\partial \widehat{M}}+\frac{\partial N}{\partial \widehat{M}}U_{\text{опт}}\left(\widehat{M},0\right)+N\left(\widehat{M}\right)\frac{\partial U_{\text{опт}}\left(\widehat{M},0\right)}{\partial \lambda}\right]D+$$

$$+D\left[\frac{\partial P}{\partial \widehat{M}}+\frac{\partial N}{\partial \widehat{M}}U_{\text{опт}}\left(\widehat{M},0\right)\right]-N\left(\widehat{M}\right)\frac{\partial U_{\text{опт}}\left(\widehat{M},0\right)}{\partial \lambda}-$$

$$-2D\left\{\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\left[\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\int_{\xi_*}\Phi_1\left[\tilde{\rho}\left(\xi,\widehat{M},t\right)\right]d\xi\right]^T\right\}D.$$

Для конкретных видов законов управления матричное дифференциальное уравнение для функции D существенно упрощается. Так, для $U_{\text{опт}}$, соответствующего квадратичному по U критерию J_*, уравнение D принимает вид

$$\dot{D} = 2\left[\frac{\partial P}{\partial \widehat{M}} + N\left(\widehat{M}\right)S\left(\widehat{M},t\right)\right]D + D\frac{\partial P}{\partial \widehat{M}} - N\left(\widehat{M}\right)S\left(\widehat{M},t\right) -$$
$$-2D\left\{\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\left[\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\int_{\xi_*}\Phi_1\left[\tilde{\rho}\left(\xi,\widehat{M},t\right)\right]d\xi\right]^T\right\}D.$$

Приближенный вид закона оптимального управления легко находится путем сравнения правых частей уравнений для векторов M и $\widehat{M}$:

$$U_{\text{опт}} \approx -N^{-1}\left(\widehat{M}\right)D\left[\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\int_{\xi_*}\Phi_1\left[\tilde{\rho}\left(\xi,\widehat{M},t\right)\right]d\xi\right]^T.$$

Интересно отметить, что в этом случае управление, во-первых, оказывается явно зависящим от интеграла $\int_{\xi_*}\Phi_1\left[\tilde{\rho}\left(\xi,\widehat{M},t\right)\right]d\xi$, определяющего существо оптимизируемого критерия J_*, а во-вторых, легко может быть сформировано в реальном масштабе времени.

Пример 2. В уравнении нелинейного стохастического объекта (1.19) положим $N_0 = N_1 = 2$, $N_2 = 1$ и сформулируем задачу синтеза оптимального управления как управления, обеспечивающего максимум вероятности существования переменной состояния ξ на интервале ξ_* в течение заданного времени T в условиях неопределенности вероятностных характеристик шума объекта и обеспечения минимума амплитуды U самого управляющего воздействия. Аппроксимируем в этом случае плотность распределения лапласовской, что позволяет записать гамильтониан для системы (1.20) следующим образом:

$$G\left(M,\lambda,t\right) = -\left[2\left(m_2 - m_1^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\int_{\xi_*}\exp\left[-\left(\frac{2}{m_2 - m_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\xi - m_1\right|\right]d\xi +$$
$$+U^T\xi_*U + \lambda^T\left[P\left(M,F,F_0\right) + N\left(M\right)U\right],$$

где m_1, m_2 – моменты лапласовского распределения.

Оптимальный закон управления принимает при этом вид

$$U_{\text{опт}} = -\left(2\xi_*\right)^{-1} N^T\left(M\right)\lambda .$$

С целью возможности формирования управления в реальном масштабе времени используем методику синтеза приближенного управления на основе инвариантного погружения

$$U_{\text{опт}} \approx N^{-1}\left(\widehat{M}\right) D\left\{\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\int\limits_{\xi_*}\left[2\left(\widehat{m}_2-\widehat{m}_1^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\left(\frac{2}{\widehat{m}_2-\widehat{m}_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\widehat{m}_1\right|\right]d\xi\right\}^T ,$$

$$\widehat{M} = \left|\widehat{m}_1\widehat{m}_2\right|^T ,$$

где уравнения для $\widehat{M}$ и D имеют вид

$$\dot{\widehat{M}} = \left|\frac{f_0+\dfrac{D_n}{2f_{00}f_{01}}+\left(f_1+\dfrac{D_n}{2f_{01}^2}\right)\widehat{m}_1+f_2\widehat{m}_2}{D_nf_{00}^2+\left(2f_0+\left(D_n+2\right)f_{00}f_{01}\right)\widehat{m}_1+12f_2\widehat{m}_1^3+\left(2f_1+\left(D_n+1\right)f_{01}^2\right)\widehat{m}_2}\right|+$$

$$+D\left\{\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\int\limits_{\xi_*}\left[2\left(\widehat{m}_2-\widehat{m}_1^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\left(\frac{2}{\widehat{m}_2-\widehat{m}_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\widehat{m}_1\right|\right]d\xi\right\}^T ,$$

$$\dot{D} = 2\left[\left|\begin{array}{c:c} f_1+\dfrac{D_n}{2f_{01}^2} & f_2 \\ \hdashline 2f_0+\left(D_n+2\right)f_{00}f_{01}+36f_2\widehat{m}_1^2 & f_{01}^2\left(D_n+1\right)+2f_1 \end{array}\right| - \frac{N\left(\widehat{M}\right)N^T\left(\widehat{M}\right)}{2\xi_*}\right]D+$$

$$+D\left|\begin{array}{c:c} f_1+\dfrac{D_n}{2f_{01}^2} & f_2 \\ \hdashline 2f_0+\left(D_n+2\right)f_{00}f_{01}+36f_2\widehat{m}_1^2 & f_{01}^2\left(D_n+1\right)+2f_1 \end{array}\right| + \frac{N\left(\widehat{M}\right)N^T\left(\widehat{M}\right)}{2\xi_*}+$$

$$+2D\left\{\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\left[\frac{\partial}{\partial \widehat{M}}\int\limits_{\xi_*}\left[2\left(\widehat{m}_2-\widehat{m}_1^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\left(\frac{2}{\widehat{m}_2-\widehat{m}_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left|\xi-\widehat{m}_1\right|\right]d\xi\right]^T\right\}D,$$

$$N\left(\widehat{M}\right) = \left[i\widehat{m}_{i+j-1}\right] \quad \left(i=1,2;\; j=\overline{0,\,2}\right).$$

Для сравнения с точки зрения точности и вычислительных затрат предложенного подхода с традиционным запишем закон управления, сформированный на основе последнего [28]

$$U_{\text{опт}} = -\left(2\xi_*\right)^{-1} M\left[\psi^T\left(\xi\right)\lambda\right],$$

где $M(...)$ – знак математического ожидания, $\psi(\xi) = \left|1\,\xi\,\xi^2\right|$.

Гауссовская аппроксимация распределения вектора $\left|\xi\ \lambda\right|^T = \alpha$ (требующая линеаризации в окрестности оценки, приводящей, в свою очередь, к дополнительной ошибке) позволяет записать следующую систему сопряженных уравнений:

$$\dot{\hat{\xi}} = \psi\left(\hat{\xi}\right)\left[F + \hat{U}_{\text{опт}}\right],$$

$$\dot{\hat{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial\hat{\xi}}\int_{\xi_*} G\left(\xi,\hat{\xi}\right)d\xi - \frac{\partial\psi}{\partial\hat{\xi}}\left[F + \hat{U}_{\text{опт}}\right]\hat{\lambda},$$
$$\dot{K} = AK + KA^T + B,$$

где

$$\hat{U}_{\text{опт}} = U_{\text{опт}}\left(\hat{\xi},\hat{\lambda}\right) = -\left(2\xi_*\right)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int\psi^T\left(\xi\right)\lambda G\left(\xi,\lambda,\hat{\xi},\hat{\lambda},K\right)d\xi\,d\lambda,$$

$G\left(\xi,\lambda,\hat{\xi},\hat{\lambda},K\right)$ – двумерная гауссовская плотность распределения с вектором средних $\hat{\alpha} = \left|\hat{\xi}\ \hat{\lambda}\right|^T$ и матрицей дисперсии K;

$$A = \frac{\partial}{\partial\hat{\alpha}}\left|\begin{array}{c}\psi\left(\hat{\xi}\right)\left[F + U_{\text{opt}}\left(\hat{\xi},\hat{\lambda}\right)\right] \\ \hdashline \dfrac{\partial}{\partial\hat{\xi}}\displaystyle\int_{\xi_*} G\left(\xi,\hat{\xi}\right)d\xi - \dfrac{\partial\psi}{\partial\hat{\xi}}\left[F + U_{\text{opt}}\left(\hat{\xi},\hat{\lambda}\right)\right]\hat{\lambda}\end{array}\right|,$$

$$B = D_n\left|\begin{array}{c}\psi\left(\hat{\xi}\right)F_0 \\ \hdashline \dfrac{\partial\psi}{\partial\hat{\xi}}F_0\hat{\lambda}\end{array}\right|\left|\begin{array}{c:c}\psi\left(\hat{\xi}\right)F_0 & \dfrac{\partial\psi}{\partial\hat{\xi}}F_0\hat{\lambda}\end{array}\right|.$$

По сравнению с системой сопряженных уравнений типа (1.22), полученной по предложенной методике для данного случая, традиционная система оказывается, во-первых, с более сложной правой частью, а во-вторых, большей размерности (6 против 4). При использовании метода инвариантного погружения это приводит к увеличению размерности уравнений для приближенных оценок с 6 до 10, т.е. в ~ 1,6 раза. В целях сравнительной оценки точности и вычислительной эффективности традиционного и разработанного подходов было проведено численное моделирование субоптимального (полученного на основе метода инвариантного погружения) управления объектом (1.18) при $F = F_0 = 1$, $D_n = 1{,}7$, $N_0 = N_1 = 2$, $N_2 = 1$, $\xi_0 = 0$, $\xi_* = [-2{,}1;\ 3{,}5]$, $T = [0;100]$ с, реализованного для 30 стохастических траекторий движения объекта. Интегрирование уравнений осуществлялось методом Рунге-Кутты третьего порядка с шагом 0,05 с, при этом на 25-й и 40-й секундах в течение 75 шагов для каждой реализации вносилось неучитываемое в алгоритмах управления изменение интенсивности D_W в 1,5 и D_n в 1,2 раза для проверки минимаксных свойств сформированного управления. Оценка точности управления осуществлялась путем усреднения по ансамблю реализаций среднемодульных отклонений отдельно взятых траекторий движения от границ интервала ξ_* в течение времени T. По окончании моделирования было установлено, что точность управления на основе разработанного подхода выше традиционного в ~3,5 раза при существенно меньшем (в ~ 2,1 раза) объеме памяти, требуемом в процессе интегрирования уравнений, обеспечивающих формирование искомого уравнения. Полученные результаты являются достаточно убедительным свидетельством преимущества даже субоптимального управления, синтезированного на основе предложенного подхода, перед традиционными алгоритмами.

Пример 3. В качестве примера, иллюстрирующего возможность использования рассмотренного субоптимального подхода в реальных многомерных объектах, рассмотрим решение задачи управления посадкой космического аппарата (КА) на Луну [163] в условиях неизбежных возмущений тяги двигателя и случайных параметров траекторий. Уравнения движения КА в этом случае в принятых обозначениях принимают вид

$$\begin{gathered}\dot{\xi}_1 = \xi_2;\ \dot{\xi}_2 = \frac{\beta U}{\xi_3} - \gamma + \frac{\beta}{\xi_3} n;\ \dot{\xi}_3 = -U - n, \\ \xi_1(t_0) = \xi_{10},\ \ \xi_2(t_0) = \xi_{20},\ \xi_3(t_0) = \xi_{30},\end{gathered} \tag{1.23}$$

где ξ_1 – расстояние до поверхности, $\xi_1 \in [\xi_{10};\ \xi_{1К} = 0]$,

ξ_2 – скорость КА, $\xi_2 \in [\xi_{20};\ \xi_{2К} = 0]$,

ξ_3 – масса КА, $\xi_3 \in [\xi_{30};\ \xi_{3К} = 0]$, $\beta, \gamma = const$;

n – белый гауссовский шум с интенсивностью $D_n(t)$.

При этом полагаем также, что управление U (секундный расход топлива) в соответствии с [163] формируется в функции времени. Сформулировав задачу синтеза оптимального управления аналогично рассмотренному выше – как задачу формирования управления, обеспечивающего максимум вероятности одновременного существования переменных ξ_1, ξ_2 в соответствующих пределах $\xi_{j*} = [\xi_{j\,\min}, \xi_{j\,\max}]$, $j = 1{,}2$, в течение временного интервала T в условиях неопределенности вероятностных характеристик возмущений и при обеспечении минимума управляющего воздействия, учтем, что плотность распределения исследуемого вектора $\xi = \left|\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\right|^T$ в силу характера уравнений (1.23) может быть представлена как:

$$\rho(\xi, t) = \rho_1(\xi_1/\xi_2, t)\rho_2(\xi_2/\xi_3, t)\rho_3(\xi_3, t),$$

где $\rho_i, i = \overline{1,3}$ – условные и безусловная плотности распределения соответствующих процессов.

При использовании в соответствии с ранее изложенными соображениями лапласовской аппроксимации плотностей подобная декомпозиция $\rho(\xi, t)$ приводит к следующей системе уравнений моментов:

– по составляющей ξ_3:

$$\dot{m}_{1(3)} = -U,$$
$$\dot{m}_{2(3)} = -2m_{1(3)}U + D_n;$$

– по составляющей ξ_2:

$$\dot{m}_{1(2)} = -\gamma + \beta U \int_{\xi_{30}}^{\xi_{3K}} \frac{\tilde{\rho}_3\left(\xi_3, m_{i(3)}, i = 1,2; t\right)}{\xi_3} d\xi_3,$$

$$\dot{m}_{2(2)} = -2m_{1(2)}\gamma + 2\beta U m_{1(2)} \int_{\xi_{30}}^{\xi_{3K}} \frac{\tilde{\rho}_3\left(\xi_3, m_{i(3)}, i = 1,2; t\right)}{\xi_3} d\xi_3 +$$
$$+ D_n\beta^2 \int_{\xi_{30}}^{\xi_{3K}} \frac{\tilde{\rho}_3\left(\xi_3, m_{i(3)}, i = 1,2; t\right)}{\xi_3^2} d\xi_3,$$

– по составляющей ξ_1:

$$\dot{m}_{1(1)} = m_{1(2)},$$
$$\dot{m}_{2(1)} = 2m_{1(1)}m_{1(2)},$$

где $m_{i(j)}$ – i-й момент j-й составляющей;

$\tilde{\rho}_3\left(\xi_3, m_{i(3)}, i = 1,2; t\right)$ – плотность распределения Лапласа с параметрами $m_{1(3)}$, $m_{2(3)}$, аппроксимирующая плотность $\rho(\xi_3, t)$;

или в векторной форме, аналогично (1.20):

$$\dot{M} = P(M, \beta, \gamma, D_n) + N(M)U,$$

где

$$M = \left| m_{1(1)}\ m_{2(1)}\ m_{1(2)}\ m_{2(2)}\ m_{1(3)}\ m_{2(3)} \right|^T,$$

$$N(M) = \begin{vmatrix} \beta \int\limits_{\xi_{30}}^{\xi_{3K}} \dfrac{\tilde{\rho}_3\left(\xi_3, m_{i(3)}, i = 1,2; t\right)}{\xi_3} d\xi_3 \\ 2\beta m_{1(2)} \int\limits_{\xi_{30}}^{\xi_{3K}} \dfrac{\tilde{\rho}_3\left(\xi_3, m_{i(3)}, i = 1,2; t\right)}{\xi_3} d\xi_3 \\ -1 \\ -2m_{1(3)} \end{vmatrix}.$$

В этом случае гамильтониан принимает вид

$$G(M, \lambda, t) = -\prod_{j=1}^{2} \int\limits_{\xi_{j*}} \tilde{\rho}_j\left(\xi_j, m_{i(j),}\, i = 1,2; t\right) d\xi_j + U^2 \xi_* +$$

$$+ \lambda^T \left(P(M, \beta, \gamma, D_n) + N(M)\, U \right),$$

$$\xi_* = \prod_{j=1}^{3} \left| \left(\xi_{jk} - \xi_{j0} \right) \right|,$$

где $\tilde{\rho}_j\left(\xi_j, m_{i(j),}\, i = 1,2; t\right)$ – лапласовские плотности распределения, аппроксимирующие плотности соответствующих параметров движения ξ_j, $j = 1,2$; откуда оптимальное управление определяется аналогично предыдущему:

$$U_{\text{опт}} = -\left(2\xi_*\right)^{-1} N^T(M)\lambda.$$

При численном моделировании управления, синтезированного на основании предложенного подхода, и сравнении его с традиционным была использована методика примера 1 – управление в обоих случаях формировалось на основе метода инвариантного погружения, управление движением было реализовано для 20 вариантов стохастических траекторий КА при дополнительном внесении для проверки минимаксных свойств управления неучитываемых возмущений интенсивности D_n (в 1,5 раза) на 15-й и 30-й секундах, оценка точности осуществлялась усреднением по ансамблю реализаций среднемодульных отклонений переменных ξ_1, ξ_2 от границ соответствующих интервалов ξ_{1*}, ξ_{2*} в течение всего времени моделирования T.

При этом шаг интегрирования был выбран 0,05 с, $T = [0;45]$ с, $\xi_{10} = 75\cdot10^3$ м, $\xi_{20} = 2{,}5\cdot10^3$ м/с, $\xi_{1*} = [1;7]$ м, $\xi_{2*} = [3;9]$ м/с. Использованная методика сравнения управлений позволила установить, что в данном случае точность управления на основе разработанного подхода оказалась выше традиционного в ~ 1,9 раза при соответствующем уменьшении объема памяти, необходимого при численном синтезе искомых управлений в ~ 4,7 раза.

Таким образом, резюмируя полученные результаты, можно сделать вывод о возможности эффективного применения предложенного подхода при априорном синтезе управления реальными стохастическими объектами.

1.4. Апостериорное управление стохастическим вектором состояния

Проблема синтеза апостериорного управления стохастическими объектами впервые была поставлена в начале 1960-х гг. А. Фельдбаумом как проблема дуального управления, но до настоящего времени не получила своего полного разрешения – для непрерывных нелинейных систем и в общем случае нелинейной формы оптимизируемого функционала. В то же время анализ правых частей уравнений (1.2, 1.5) – для априорной и апостериорной плотностей, показывает, что они отличаются лишь аддитивной составляющей $S\{\rho_z, \xi, t\}$, независящей от искомого управления U. Это позволяет сделать предположение о возможности использования рассмотренного выше подхода к синтезу априорного управления и для данного случая, т.е. для построения дуального управления.

Если при подобном формировании управления в качестве критериев оптимизации взять терминальные критерии типа (1.9, 1.10), то весь ход синтеза ничем не будет отличаться от изложенного выше для априорного управления, вплоть до формы закона самого оптимального управления. Отличие будет лишь в формах правых частей уравнений сопряженной системы (1.15) – вместо оператора L_0 необходимо использовать сумму ($L_0 + S$). Принципиальная трудность здесь состоит в том, что при использовании терминальных критериев оптимальное управление $U_{\text{опт}}$ неизбежно должно зависеть от совокупности наблюдений Z, $t \in [t_0, t_k]$, полученных на всем интервале T. Очевидно, что практическое использование такого подхода к управлению возможно только для систем, обладающих свойством повторяемости характера и параметров динамического процесса и неизменности вероятностных характеристик шумов на различных временных интервалах длительности T. Для большинства же практических случаев управление необходимо формировать в реальном масштабе времени, по мере поступления текущих наблюдений. Подобный синтез управления оказывается возможным в двух случаях – когда за счет аппроксимации плотности распределения система сопряженных дифференциальных уравнений с частными производными (1.15) сводится к системе сопряженных обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых далее приближенным методом инвариантного погружения, и когда в качестве критерия оптимизации используется локальный критерий вида (1.11).

Рассмотрим вначале первый случай на конкретном примере, для реального многомерного объекта – на примере спуска космического аппарата в условиях возмущающих воздействий с заранее неизвестными вероятностными характеристиками.

1.4.1. Синтез апостериорного управления на основе метода инвариантного погружения

Аэродинамический спуск (АДС) космического аппарата (КА) в возмущенной атмосфере при совершении глубоких незапланированных пространственных маневров (например, в случае аварийных режимов возвращения на Землю) характеризуется неопределенностью начальных условий спуска и параметров атмосферы, отсутствием программной траектории, значительными флюктуациями массовых и аэродинамических характеристик КА [163]. Подобные обстоятельства неизбежно приводят к стохастическому характеру задачи синтеза управления КА, причем, в условиях неопределенности процесса АДС. Очевидно, что использование традиционных методов оптимизации управления КА, например, с целью достижения максимальной вероятности выведения его в заданную область пространства, оказывается в этом случае неэффективным [1, 163].

Для возможности дальнейшего решения задачи поиска оптимального управления КА, совершающего АДС, в условиях неопределенности параметров последнего, сформулируем ее следующим образом.

В общем случае математическая модель движения КА в атмосфере может быть представлена в виде (1.1), где ξ – вектор состояния КА размерности l в инерциальной системе координат; u – нелинейная вектор-функция управления КА; n_t – вектор белого гауссовского шума размерности r с нулевым средним и матрицей интенсивностей $D_n(t)$, обусловленный неопределенностью параметров внешней среды, обгаром и сносом теплозащитного слоя покрытия.

Характер зависимости функции u от углов поворота рулевых органов определяется типом, принципом действия, расположением и т.д. последних. Для управления АДС КА используют газоструйные или аэродинамические рули [163], в этом случае

$$u(\xi,t) = g_0(\xi,t) + g_1(\xi,t)\delta + g_2(\xi,t)\delta^T E_0\delta\ , \tag{1.24}$$

где $\delta = \left|\delta_1 \ldots \delta_q\right|^T$, $\delta_i\left(i=\overline{1,q}\right)$ – углы отклонения i-х рулевых органов;

g_0, g_1, g_2 – известные нелинейные вектор-функции и функции-матрицы размерности l, $l*q$ и l соответственно;

E_0 = const – известная симметричная матрица;

и задача поиска управления сводится к определению оптимального в смысле выбранного критерия вектора $\delta = \delta(\xi,t)$.

При этом необходимо отметить, что измерению доступны не все составляющие вектора $\xi(t)$, а лишь те, которые определяются измерительной частью системы управления, функционирующей на участке АДС [6]:

$$Z(\xi,t) = H(\xi,t) + W_t\,, \tag{1.25}$$

где Z – вектор выходного сигнала наблюдателя размерности p ($p \geq 1$);
H– известная нелинейная вектор-функция;
W_t– вектор белого гауссовского шума с нулевым средним и матрицей интенсивностей $D_W(t)$.

Так как целью управления является обеспечение существования параметров состояния КА в конечный момент времени t_k в заданной области $\xi_* = [\xi_{min}, \xi_{max}]$ с максимальной вероятностью в условиях неопределенности процесса АДС, то задачу синтеза искомого управления сформулируем далее как минимаксную: на временном интервале спуска КА в атмосфере $T = [t_0,\ t_k]$ требуется определить векторную функцию управления (1.24) из условия м а к с и м у м а вероятности p попадания КА в заданную область ξ_*:

$$p = \int\limits_{T}\int\limits_{\xi_*} \rho(\xi,t)\,d\xi\, dt\,,$$

где $\rho(\xi,t) = \rho(\xi_t / Z_\tau, \tau \in T)$ –апостериорная плотность вероятности процесса ξ_t, при минимуме информации о процессе ξ_t, т.е. при выборе апостериорной плотности вероятности (АПВ) из условия обеспечения минимума информационного функционала Фишера [119].

С учетом очевидных требований к минимуму энергетических затрат на реализацию синтезируемого управления u и его явной аналитической зависимости от физически реализуемого вектора управления δ, окончательный вид минимизируемого функционала можно представить следующим образом:

$$J = \int\limits_{T}\int\limits_{\xi_*} \left[-\rho(\xi,t) + \delta^T(\xi,t) K_0 \delta(\xi,t)\right] d\xi\, dt\,, \tag{1.26}$$

где K_0 – известная матрица коэффициентов, вид которой обусловлен особенностями используемых рулевых органов.

В общем случае АПВ $\rho(\xi,t)$, входящая в J, описывается интегро-дифференциальным уравнением в частных производных (1.5). Но в силу особенности решаемой задачи, определяющей необходимость предварительного выбора АПВ из дополнительного условия минимума информационного функционала, рассмотрим далее в качестве АПВ гауссовскую плотность, минимизирующую функционал Фишера при условии финитности дисперсии [119].

В этом случае уравнение для АПВ трансформируется в систему дифференциальных уравнений апостериорного математического ожидания (оценки) $\hat{\xi}$ процесса ξ_t и ковариационной матрицы ошибок оценивания P (1.8), которая для рассматриваемого случая имеет вид

$$\dot{\hat{\xi}} = \nu\left(\hat{\xi},u,t\right) + P(t)\left[\frac{\partial H\left(\hat{\xi},t\right)}{\partial\hat{\xi}}\right]^T D_W^{-1}(t)\left\{Z(t) - H\left(\hat{\xi},t\right)\right\};$$

$$\dot{P} = \left[\frac{\partial\nu\left(\hat{\xi},u,t\right)}{\partial\hat{\xi}}\right]P + P\left[\frac{\partial\nu\left(\hat{\xi},u,t\right)}{\partial\hat{\xi}}\right]^T - P\left[\frac{\partial H\left(\hat{\xi},t\right)}{\partial\hat{\xi}}\right]^T D_W^{-1}\left[\frac{\partial H\left(\hat{\xi},t\right)}{\partial\hat{\xi}}\right]P + \quad (1.27)$$

$$+ f_0 D_n f_0^T,$$

где

$$\nu\left(\hat{\xi},u,t\right) = f^*\left(\hat{\xi},t\right) + g_1\left(\hat{\xi},t\right)\delta\left(\hat{\xi},t\right) + g_2\left(\hat{\xi},t\right)\delta^T\left(\hat{\xi},t\right)E_0\delta\left(\hat{\xi},t\right);$$

$$f^*\left(\hat{\xi},t\right) = f\left(\hat{\xi},t\right) + g_0\left(\hat{\xi},t\right);$$

$$\hat{\xi}(0) = M\left[\xi_0\right] = \hat{\xi}_0, \qquad P_0 = M\left[\left(\hat{\xi}_0 - \xi_0\right)\left(\hat{\xi}_0 - \xi_0\right)^T\right];$$

Следуя подходу, предложенному в [119], представим искомое управление – вектор δ углов отклонения исполнительных органов, с точностью до малых второго порядка векторным степенным рядом по $\hat{\xi}$ (порядок которого, как будет показано ниже, может быть произвольным и определяется лишь компромиссом между требуемой точностью аппроксимации вектора δ и необходимым объемом вычислительных затрат при его формировании):

$$\delta\left(\hat{\xi},t\right) \approx A_0(t) + A_1(t)\hat{\xi}(t), \qquad (1.28)$$

где A_0, A_1 – векторная и матричная функции размерности q и $q*l$ соответственно. Таким образом, задача синтеза оптимального управления КА в процессе АДС сводится к поиску A_0, A_1, обеспечивающих минимум критерия J при описании вектора параметров АПВ уравнениями (1.27). Для возможности использования известных алгоритмов оптимального управления [147] сформируем расширенный вектор $\gamma = \begin{vmatrix} \hat{\xi} \\ P^{(\nu)} \end{vmatrix}$ размерности (с учетом симметрии матрицы P) $l(l+3)/2$, где вектор $P^{(\nu)}$ образован из элементов матрицы P по использованному в п. 1.1 правилу:

$$P^{(\nu)} = \left| p_{11} p_{21} \cdots p_{11} p_{22} p_{32} \cdots p_{12} p_{33} p_{43} \cdots p_{13} \cdots p_{11} \right|^T .$$

Возникающая при этом необходимость трансформации правой части матричного дифференциального уравнения для P требует применения соответствующего математического аппарата исследования возмущенных многомерных динамических систем [147]. С этой целью представим предварительно матрицу $\partial\nu/\partial\hat{\xi}$ с учетом (1.28) следующим образом:

$$\frac{\partial \nu}{\partial \hat{\xi}} = \frac{\partial f^*}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial g_1}{\partial \hat{\xi}} \hat{\otimes} \delta + g_1 \frac{\partial \delta}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial g_2}{\partial \hat{\xi}} \delta^T E_0 \delta + g_2 \frac{\partial \left[\delta^T E_0 \delta \right]}{\partial \hat{\xi}} =$$

$$= \frac{\partial f^*}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\partial g_1}{\partial \hat{\xi}} \hat{\otimes} \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right) + g_1 A_1 + \frac{\partial g_2}{\partial \hat{\xi}} \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right) E_0^T \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right) +$$

$$+ 2 g_2 \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right)^T E_0 A_1 ,$$

где $\delta = A_0 + A_1 \hat{\xi} = A_0 + \left(\hat{\xi}^T \otimes I_q \right) A_1^{(\nu)} = \left| I_q \;\vdots\; \hat{\xi}^T \otimes I_q \right| \cdot \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix};$

$\otimes; \hat{\otimes}$ – соответственно кронекеровское и блочное произведение матриц;
I_q – единичная матрица размерности $q*q$;
σ – матрица размерности $q*(q+l*q)$;
$\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix}$ – искомый вектор управления размерности $q+l*q$;

и тогда получим:

$$\dot{P}^{(\nu)} = \chi^{(\nu)} + \left[\left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \hat{\xi}} \hat{\otimes} \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right) + g_1 A_1 + 2 g_2 \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right)^T E_0 A_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial g_2}{\partial \hat{\xi}} \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right)^T E_0 \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right) \right\} P \right]^{(\nu)} + \left[P \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial \hat{\xi}} \hat{\otimes} \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right) + g_1 A_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2 g_2 \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right)^T E_0 A_1 + \frac{\partial g_2}{\partial \hat{\xi}} \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right)^T E_0 \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} \right) \right\}^T \right]^{(\nu)} ,$$

где $\chi = \left(\frac{\partial f^*}{\partial \hat{\xi}}\right) P + P\left(\frac{\partial f^*}{\partial \hat{\xi}}\right)^T + P\left(\frac{\partial H}{\partial \hat{\xi}}\right)^T D_W^{-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \hat{\xi}}\right) P + f_0 D_n f_0^T$.

Воспользовавшись леммами, приведенными в [163], окончательно запишем (прил. 2):

$$\dot{P}^{(\nu)} = \chi^{(\nu)} + (P \otimes I_1)\left[\frac{\partial g_1}{\partial \hat{\xi}}\right]^{\wedge}\left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right) + (P \otimes g_1) A_1^{(\nu)} +$$

$$+\left[P \otimes \left[2 g_2 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right)^T E_0\right] A_1^{(\nu)} + \left(P \otimes \frac{\partial g_2}{\partial \hat{\xi}}\right) I_1^{(\nu)}\left\{\left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right) E_0 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right)\right\} +\right.$$

$$+(I_1 \otimes P)\left[\frac{\partial g_1}{\partial \hat{\xi}}\right]^*\left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right) + (g_1 \otimes P)\left(A_1^T\right)^{(\nu)} + \left[\left[2 g_2 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right)^T E_0\right] \otimes P\right]\left(A_1^T\right)^{(\nu)} +$$

$$+\left(\frac{\partial g_2}{\partial \hat{\xi}} \otimes P\right) I_1^{(\nu)}\left\{\left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right) E_0 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right)\right\}, \qquad (1.29)$$

где $\overset{\wedge}{[\ldots]}, [\ldots]^*$ – операции с матрицами, определенные в прил. 1.

Перепишем систему (1.27), учитывая (1.29) и выделив искомые векторные коэффициенты оптимизируемого управления A_0 и $A_1^{(\nu)}$ (вывод приведенных ниже выражений дан в прил. 3):

$$\dot{\hat{\xi}} = f^* + \left| g_1 \;\vdots\; \Phi_1 \right| \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix} + g_2 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right)^T E_0 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right) + k\left[Z - H\right];$$

$$\dot{P}^{(\nu)} = \chi^{(\nu)} + \left| M_0 \;\vdots\; M_1 \right| \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix} + M_2\left(A_1^T\right)^{(\nu)} + r_0\left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right)^T E_0 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right) +$$

$$+\left(P \otimes \left[2 g_2 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right)^T E_0\right]\right) A_1^{(\nu)} + \left(\left[2 g_2 \left(\sigma\begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)}\end{vmatrix}\right)^T E_0\right] \otimes P\right)\left(A_1^T\right)^{(\nu)}, \qquad (1.30)$$

где

$$\Phi_1 = g_1\left(\hat{\xi}^T \otimes I_q\right);$$

$$k = P\left(\frac{\partial H}{\partial \hat{\xi}}\right)^T D_W^{-1};$$

$$M_0 = \left(P \otimes I_1\right)\left[\frac{\widehat{\partial g_1}}{\partial \hat{\xi}}\right] + \left(I_1 \otimes P\right)\left[\frac{\partial g_1}{\partial \hat{\xi}}\right]^*;$$

$$M_1 = \left(P \otimes I_1\right)\left[\frac{\widehat{\partial g_1}}{\partial \hat{\xi}}\right]\left(\hat{\xi}^T \otimes I_q\right) + P \otimes g_1 + \left(I_1 \otimes P\right)\left[\frac{\partial g_1}{\partial \hat{\xi}}\right]^*\left(\hat{\xi}^T \otimes I_q\right);$$

$$M_2 = g_1 \otimes P;$$

$$r_0 = \left(P \otimes \frac{\partial g_2}{\partial \hat{\xi}}\right) I_1^{(\nu)} + \left(\frac{\partial g_2}{\partial \hat{\xi}} \otimes P\right) I_1^{(\nu)}.$$

Векторные дифференциальные уравнения (1.30) представляют собой уравнения для расширенного вектора $\gamma = \begin{vmatrix} \hat{\xi} \\ P^{(\nu)} \end{vmatrix}$ и могут быть представлены в каноническом виде

$$\dot{\gamma} = F(\gamma, t) + \Gamma\left(\gamma, A_0, A_1^{(\nu)}, t\right) \quad , \tag{1.31}$$

где

$$F = \begin{vmatrix} f^* + k(Z - H) \\ \hdashline \chi^{(\nu)} \end{vmatrix};$$

$$\Gamma = \begin{vmatrix} g_1 & \Phi_1 \\ \hdashline M_0 & M_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_2 \\ \hdashline r_0 \end{vmatrix} \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix}\right)^T E_0 \left(\sigma \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix}\right) + \begin{vmatrix} 0 \\ \hdashline M_2 \end{vmatrix} \left(A_1^T\right)^{(\nu)} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 \\ \hdashline \left[P \otimes \left(2 g_2 \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix}^T \sigma^T E_0\right)\right] A_1^{(\nu)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \hdashline \left[\left(2 g_2 \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix}^T \sigma^T E_0\right) \otimes P\right] \left(A_1^T\right)^{(\nu)} \end{vmatrix},$$

F, Γ – вектор-функции соответствующей размерности.

Для синтеза искомого вектора управления $a = \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1^{(\nu)} \end{vmatrix}$, обеспечивающего минимум критерия (1.26) при описании вектора состояния (1.31), используем далее принцип максимума [131]. Для этого представим функционал (1.26) следующим образом:

$$J=\int_T\int_{\xi_*}\left[-\rho+(\sigma a)^T K_0(\sigma a)\right]d\xi dt=\int_T L(\gamma,a,t)dt$$

и запишем соответствующий гамильтониан:

$$G(\gamma,a,\lambda,t)=L(\gamma,a,t)+\lambda^T(t)[F(\gamma,t)+\Gamma(\gamma,a,t)],$$

где λ – вектор сопряженных переменных.

Оптимальный вектор a определяется в этом случае из уравнения [131]:

$$\frac{\partial G}{\partial a}=\frac{\partial L}{\partial a}+\lambda^T\frac{\partial}{\partial a}[F+\Gamma]=0. \tag{1.32}$$

Так как входящая в функционал (1.26) АПВ, имеющая в принятых обозначениях вид

$$\rho(\xi,\gamma)=\left[\sqrt{(2\pi)^n\det P}\right]^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\xi-\hat{\xi}\right)^T P^{-1}\left(\xi-\hat{\xi}\right)\right\},$$

от a не зависит, то первое слагаемое уравнения (1.32) может быть представлено как:

$$\frac{\partial L}{\partial a}=\frac{\partial}{\partial a}\left[\int_{\xi_*}(\sigma a)^T K_0(\sigma a)d\xi\right]=\frac{\partial}{\partial a}\left[a^T\Pi a\right]=2a^T\Pi, \tag{1.33}$$

где

$$\Pi=\int_{\xi_*}\sigma^T K_0\sigma d\xi.$$

Далее, используя приведенные в приложениях 1, 3 соотношения, леммы из [131] и учитывая, что $\frac{\partial F(\gamma,t)}{\partial a}=0$, получим второе слагаемое уравнения (1.32) (вывод дан в прил. 4):

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial a}=\left|\begin{array}{c:c} g_1 & \Phi_1 \\ \hdashline M_0 & M_1\end{array}\right|+\left|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & M_2E^I\end{array}\right|+\left[\left|\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline B_1+B_4\end{array}\right|+\left|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & B_2+B_6\end{array}\right|+B_7\right]\hat{\otimes}a,$$

а выражение (1.33) согласно приложению 1 представим следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial a} = 2\left\{\Pi^{(\nu)}\right\}^T \hat{\otimes}\, a = B_8 \,\hat{\otimes}\, a\,.$$

Тогда в принятых обозначениях выражение (1.32) имеет вид:

$$\left\{B_8 + \lambda^T \left[\left|\begin{array}{c} 0 \\ \hdashline B_1 + B_4 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & B_2 + B_6 \end{array}\right| + B_7\right]\right\} \widehat{\otimes}\, a +$$

$$+ \lambda^T \left[\left|\begin{array}{c:c} g_1 & \Phi_1 \\ \hdashline M_0 & M_1 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c:c} 0 & 0 \\ \hdashline 0 & M_2 E^I \end{array}\right|\right] = 0$$

или

$$B_9(\lambda,\gamma,t)\,\widehat{\otimes}\, a = -B_{10}(\lambda,\gamma,t),$$

где $B_9 = \left|\, B_{9_1} \;\vdots\; B_{9_2} \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; B_{9_{q*l+q}} \,\right|, \dim\left(B_{9_1}\right) = q*l+q; \dim\left(B_{10}\right) = q*l+q$.

Следуя п. II прил. 1, преобразуем последнее уравнение к следующему виду:

$$\left|\begin{array}{c} B_{9_1} \\ \hdashline B_{9_2} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline B_{9_{q*l+q}} \end{array}\right| a = -B_{10}^T,$$

или

$$B_{11} a = -B_{10}^T,$$

где B_{11} – обычная матрица, $\dim\left(B_{11}\right) = [q*l+q]*[q*l+q]$.

Из полученного выражения имеем искомый вектор оптимального управления

$$a_{\text{опт}} = -B_{11}^{-1} B_{10}^T,$$

обеспечивающего минимум критерия (1.26) в условиях минимальной информации о процессе ξ_t (неопределенности процесса АДС КА). Искомое решение поставленной проблемы сводится в дальнейшем к решению обычной двухточечной краевой задачи (ДТКЗ), система канонических уравнений которой определяется уравнениями (1.31) и сопряженными к ним:

$$\dot{\lambda} = -\left\{\frac{\partial L\left(\gamma, a_{\text{опт}}(\gamma,\lambda), t\right)}{\partial \gamma}\right\}^T - \left\{\frac{\partial}{\partial \gamma}\left[F(\gamma,t) + \Gamma\left(\gamma, a_{\text{опт}}(\gamma,\lambda), t\right)\right]\right\}^T \lambda$$

при краевых условиях:

$$\gamma(t_0) = \gamma_0, \quad \lambda(t_k) = 0.$$

Для возможности формирования управления в реальном масштабе времени используем далее методику синтеза приближенного решения ДТКЗ на основе инвариантного погружения [163], позволяющую сформировать как систему уравнений приближенной оценки $\tilde{\gamma}$ оптимально управляемого вектора γ, так и непосредственно приближенное значение оптимального управления $\tilde{a}_{\text{opt}} = a(\tilde{\gamma},0)$:

$$\dot{\tilde{\gamma}} = F(\tilde{\gamma},t) + \Gamma\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right) - D\left[\frac{\partial L\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right)}{\partial\tilde{\gamma}}\right]^T;$$

$$\dot{D} = 2\left\{\frac{\partial F(\tilde{\gamma},t)}{\partial\tilde{\gamma}} + \frac{\partial\Gamma\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right)}{\partial\tilde{\gamma}}\right\}D + D\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{\partial L\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right)}{\partial\tilde{\gamma}}\right]^T + \right.$$

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\gamma}}\left[F(\tilde{\gamma},t) + \Gamma\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right)\right]\right\}^T + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\gamma}}\left[F(\tilde{\gamma},t) + \Gamma\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right)\right]\right\}^T \left.\lambda\right\} -$$

$$-\frac{\partial\Gamma\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right)}{\partial\lambda} - 2D\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\gamma}}\left[\frac{\partial L\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right)}{\partial\tilde{\gamma}}\right]^T + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\tilde{\gamma}}\left\{\frac{\partial}{\partial\tilde{\gamma}}\left[F(\tilde{\gamma},t) + \Gamma\left(\tilde{\gamma},\tilde{a}_{\text{opt}}(\tilde{\gamma},0),t\right)\right]\right\}^T \lambda\right\}D,$$

где матрица D играет роль весовой матрицы при отклонении оптимального вектора от его аппроксимации [163].

Очевидно, что численное интегрирование данной системы уравнений с последующим формированием вектора управления $\tilde{a}_{\text{opt}}$ не вызывает принципиальных затруднений даже при использовании бортового вычислителя.

Для иллюстрации возможности эффективного использования предложенного подхода к синтезу управления АДС КА было проведено численное моделирование оптимального управляемого движения для модели (1.1), где параметры состояния КА и соответствующие функции от них представляются следующим образом:

$$\xi = \left| V^T \, x y z \vartheta \phi \varphi \right|^T;$$

$$f(\xi,t) = \left| \begin{array}{c} \dfrac{S\rho |V_B|^2}{2m|V|} \left[-C_x V - C_y^{\alpha} \left| \begin{array}{c} [\vartheta - \arcsin(V_y/|V|)] V_y \\ [\arcsin(V_y/|V| - \vartheta)] V_x \\ |V|\phi + V_z \end{array} \right| \right] - \dfrac{g}{r}\xi \\ \hdashline V \\ \hdashline \Phi(\varphi,\phi)\Omega \end{array} \right|,$$

$$f_0(\xi,t) = \left| \begin{array}{c:c} -\dfrac{S\rho |V_B|^2}{2m|V|} \Bigg| V & \left| \begin{array}{c} [\vartheta - \arcsin(V_y/|V|)] V_y \\ [\arcsin(V_y/|V| - \vartheta)] V_x \\ |V|\phi + V_z \end{array} \right| \quad 0 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hdashline 0 & -\Phi(\varphi,\phi) \end{array} \right|,$$

$$\Phi(\varphi,\phi) = \left| \begin{array}{ccc} 0 & \dfrac{\sin\varphi}{\cos\phi} & \dfrac{\cos\varphi}{\cos\phi} \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 1 & \sin\varphi tg\phi & \cos\varphi tg\phi \end{array} \right|,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$V = \left| V_x V_y V_z \right|^T$ – вектор скорости КА в инерциальной системе координат (СК);

Ω – вектор абсолютной угловой скорости КА;

$\vartheta, \varphi, \theta$ – углы Эйлера-Крылова разворота КА относительно инерциальной СК;

$C_x = C_x(M,h,\alpha), C_y^{\alpha} = C_y^{\alpha}(M,h)$ – известные в общем случае нелинейные функции (аэродинамические коэффициенты), определяемые до старта расчетным путем (следует при этом отметить, что в большинстве случаев полета высота почти не влияет на C_y^{α});

$h = r - R$ – высота КА над поверхностью Земли;

$R = \text{const}$ – радиусЗемли;

M – число Маха;

$\alpha = \vartheta - \arcsin(V_y/|V|)$ – угол атаки [163];

m, S – масса и характерная площадь КА;

ρ – плотность стандартной атмосферы;

V_B – вектор воздушной скорости, $V_B = V + \begin{vmatrix} k_1 V_M - V_3 \\ -k_2 V_M \\ k_1 V_3 + V_M \end{vmatrix}$;

$k_1 \div k_3 = \mathrm{const}$ – известные коэффициенты;

$V_з, V_м$ – зональная и меридиональная составляющие скорости ветра;

$n_t = \begin{vmatrix} n_{c_x}\, n_{c_y}\, N_{D_x}\, N_{D_y}\, N_{D_z} \end{vmatrix}^T$;

$n_{c_x}, n_{c_y}, N_{D_x}, N_{D_y}, N_{D_z}$ – гауссовские шумы – вариации аэродинамических коэффициентов и погрешности измерителей угловой скорости КА соответственно, с нулевыми средними и известными интенсивностями $D_{c_j}(t)(j = x, y)$, $D_{D_i}(t)(i = x, y, z)$.

Вектор–функция $u(\xi,t)$ определялась в соответствии с (1.24). КА был выбран жестким осесимметричным телом с четырьмя аэродинамическими рулями тонкого симметричного профиля стреловидной формы, имеющими одинаковые размеры и расположенными по схеме «прямого креста». Технические характеристики КА и параметры его движения были выбраны следующим образом: $S = 0{,}13$ м^2; $m = 140$ кг; $C_x = 0{,}5$; $C_y = 0{,}3$; $x(0) = z(0) = 0$; $y(0) = 6{,}5 \cdot 10^6$ (м); $V_x(0)$, $V_y(0)$, $V_z(0)$ соответственно равными $6{,}25 \cdot 10^3$, $-3{,}5 \cdot 10^3$, $1{,}5 \cdot 10^2$ (м/с); $\theta(0) = \varphi(0) = 0$, $\vartheta(0) = -0{,}54$ рад; угол стреловидности консоли аэродинамического руля малого удлинения равным 0,78 рад, сужения угла – равным 1. Вариации аэродинамических коэффициентов и погрешности измерителей моделировались в виде белых гауссовских шумов с матрицами интенсивностей, соответственно $D_C = 12 \cdot 10^{-3}$, $D_D = 13 \cdot 10^{-13}$ с$^{-2}$, $D_A = 13 \cdot 10^{-11}$ м^2/с^4. Модель возмущенной плотности атмосферы Земли была использована в виде $\rho(M,h,\varphi_Г) = \rho_{СА}[1 + \delta\rho(M,h,\varphi_Г)]$, где ρ— текущая величина возмущенной плотности; $\rho_{СА}$– стандартная атмосфера, определенная по СА-81; δρ – вариации плотности, определенные численно-аналитическим путем на широте$\varphi_Г = 60°$ северного полушария для октября месяца M. С целью моделирования неопределенности задания начальных условий оценки значений параметров движения КА в исходный момент времени задавались с погрешностями из следующих интервалов:

$$\Delta_{x(0)} = \Delta_{y(0)} = [-100{,}100],\ \Delta_{z(0)} = [-50{,}50]$$
$$\Delta_{V_x(0)} = [-3.0;0],\ \Delta_{V_y(0)} = [0;1.2],\ \Delta_{V_z(0)} = [0;0.4]\ (\text{м/с}).$$

Оценки $\hat{\theta}(0), \hat{\varphi}(0), \hat{\vartheta}(0)$ выбирались равными истинным значениям в начальный момент времени. В качестве измерителя параметров движения был принят пространственный указатель воздушной скорости (УВС), оси чувствительности которого сориентированы по продольным осям КА. При этом вектор-функция модели измерителя (1.25) имеет вид

$$H(\xi,t) = \chi(\vartheta,\phi,\varphi)V_B ,$$

где $\chi(\cdot)$ – матрица направляющих косинусов разворота осей корпуса КА относительно инерциальной СК [6], а интенсивность случайной погрешности измерений УВС была принята равной 6(м^2/с^2).Интегрирование уравнений движения КА и их оценок осуществлялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0,01 с на временном интервале [0; 1000]с. Оценка точности выведения КА в заданную область пространства производилась путем сравнения точности управлений, реализованных традиционным методом (оптимальным по критерию минимума среднего квадрата ошибки [6, 28]) и предложенным методом с истинными значениями параметров по окончании временного интервала моделирования – на 100-й с полета. Вычислительные погрешности интегрирования, определенные для метода Рунге-Кутты в процессе эксперимента, при моделировании возмущенного аэродинамического спуска были скомпенсированы с целью повышения точности сравнительного анализа обоих способов управления.

По результатам моделирования тридцати траекторий аэродинамического спуска с последующим усреднением ошибок параметров движения КА по всем модельным реализациям на момент окончания интервала моделирования было установлено, что точность выведения КА за заданное время *T* при использовании предложенного подхода оказалось в среднем выше точности традиционного метода: по координатам и составляющим скорости – соответственно на [70 ÷ 110] м и [0.6 ÷ 0.9] м/с, по углам – [0.5 ÷ 0.65] угл.мин.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности эффективного применения предложенного подхода синтеза оптимального управления для реальных многомерных систем – в данном случае при спуске КА в условиях возмущенной атмосферы, отсутствия программной траектории, неопределенности начальных условий движения КА, а также неизбежных флюктуаций аэродинамических характеристик КА.

1.4.2. Апостериорное управление на основе локального критерия

Для преодоления ограничений возможности практического использования предложенного подхода к синтезу апостериорного управления рассмотрим решение поставленной выше задачи синтеза, используя вместо критерия (1.10) локальный критерий (1.11).

Исходя из изложенного, задачу поиска локально-оптимального управления объектом (1.1) сформулируем как задачу синтеза вектора *U*, доставляющего оптимум функционалу (1.11) при условии, что функция АПВ вектора состояния ξ описывается уравнением (1.5). Для решения поставленной таким образом задачи используемтот известный факт, что при неотрицательно определенной критериальной функции для обеспечения ее минимального значения в каждый момент времени достаточно, чтобы производная ее по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум [28]. Отсюда для рассматриваемого случая получаем условие для определения искомого управления:

$$\max_U\left\{-\dot{J}\right\}=\max_U\left\{-\left(\int\limits_{\xi_{(1)}}\frac{\partial\Phi_1[\rho]}{\partial\rho}\dot{\rho}d\xi+\int\limits_{\xi_{(2)}}\Phi_2[U]d\xi\right)\right\}. \tag{1.34}$$

Для последующей возможности эффективной вычислительной реализации найденного управления представим далее вектор U в виде конечного разложения по системе ортонормированных или степенных функций векторного аргумента ξ: $\{\psi_1(\xi), ..., \psi_S(\xi)\}$ [155]. Тогда, обозначив вектор $\{\psi_1(\xi), ..., \psi_S(\xi)\} = \psi$, имеем

$$U(\xi,t)=\left(E\otimes\psi^T\right)U_t=E_0(\xi)U_t, \tag{1.35}$$

где E – единичная матрица соответствующей размерности;

$\otimes$ – знак кронекеровского произведения;

$U_t=\left(U(t)_1,\dots,U(t)_{(N\times S)}\right)$ – искомый вектор коэффициентов разложения вектора управления U.

Подставляя в (1.34) выражение для правой части уравнения АПВ

$$\begin{aligned}\dot{\rho}=-div\left\{\left[f+\frac{1}{2}\frac{\partial f_0}{\partial\xi}\left(f_0^T\right)^{(v)}\right]\rho-\frac{1}{2}\overline{div}\left[f_0f_0^T\rho\right]\right\}+\\+\left[F-F_0\right]\rho-div\{U\rho\}=S[\rho]-div\{U\rho\},\end{aligned} \tag{1.36}$$

и учитывая представление (1.35), имеем следующее уравнение относительно U_t:

$$\frac{\partial}{\partial U_t}\left\{\int\limits_{\xi_{(1)}}\frac{\partial\Phi_1[\rho]}{\partial\rho}\left(S[\rho]-div\left(E_0U_t\rho\right)\right)d\xi+\int\limits_{\xi_{(2)}}\Phi_2\left[E_0U_t\right]d\xi\right\}=0.$$

Так как

$$div\left(E_0U_t\rho\right)=\left(div\left(E_{0(1)}\rho\right),\dots,div\left(E_{0(N\times S)}\rho\right)\right)^T U_t=E_1^T[\rho]U_t,$$

где $E_{0(i)}$ – i-й столбец матрицы E_0, то из последнего уравнения вытекает окончательное уравнение для определения оптимального вектора U_t:

$$\int_{\xi_{(1)}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} E_1^T[\rho] d\xi = \int_{\xi_{(2)}} \frac{\partial \Phi_2}{\partial U_t}[E_0 U_t] d\xi, \tag{1.37}$$

решение которого осуществляется, исходя из конкретного вида функции Φ_2.

Дальнейший анализ и сравнение данного подхода с предложенным в пп. 1.3, 1.4 проведем на примере традиционной квадратичной формы функции $\Phi_2(U) = U(\xi,t)^T DU(\xi,t)$, рассмотренной в п. 1.3.

Уравнение (1.37) в этом случае принимает вид

$$\int_{\xi_{(1)}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} E_1^T d\xi = U_t^T \int_{\xi_{(2)}} E_0^T \left(D^T + D\right) E_0 d\xi,$$

откуда

$$U_t = G^{-1} \int_{\xi_{(1)}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} E_1 d\xi, \tag{1.38}$$

где $G^{-1} = \int_{\xi_{(2)}} E_0^T \left(D^T + D\right) E_0 d\xi = const$ – известная симметричная матрица.

Выражение (1.38) позволяет легко учесть возможные в общем случае ограничения на вектор U_t (например, $|U_t| \le U_{\max}$) при известных текущих значениях функции АПВ ρ, формируемых в процессе решения уравнения для ρ, полученного, в свою очередь, подстановкой (1.38) в (1.35) и далее – в (1.36):

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= S[\rho] - div\left\{\rho E_0 G^{-1} \int_{\xi_{(1)}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} E_1[\rho] d\xi\right\} = \\ &= S[\rho] - E_1^T[\rho] G^{-1} \int_{\xi_{(1)}} \frac{\partial \Phi_1[\rho]}{\partial \rho} E_1[\rho] d\xi. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Таким образом, задача синтеза оптимального в смысле (1.11) управления сводится, по существу, к интегрированию уравнения (1.39) с последующей реализацией соотношений (1.38) и (1.35) в отличие от терминального подхода п. 1.3, требующего решения двухточечной краевой задачи для системы уравнений с частными производными. Несмотря на существенный выигрыш в вычислительных затратах в данном случае по сравнению с изложенным в п. 1.3, необходимость формирования вектора U_t в масштабе времени поступления измерений Z требует соответствующего, в реальном масштабе времени, решения уравнения (1.39). Особенностями последнего являются, во-первых, то, что оно представляет собой интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, т.е. относится к тому же классу, что и уравнение Стратоновича, а, во-вторых, то, что решение данного уравнения описывает функцию плотности распределения вектора ξ. Следовательно, для его решения могут быть использованы все существующие методы решения уравнения АПВ [63, 160], в качестве одного из которых – как наиболее общего – рассмотрим традиционный [63] метод аппроксимации функции ρ конечным разложением по описанному выше вектору ψ:

$$\rho(\xi, t) = \psi^T \beta,$$

где $\beta = \beta(t)$ – вектор коэффициентов разложения, определяемый в процессе дальнейшего решения.

В этом случае формирование функции ρ сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно β:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \int_{\xi} \psi S\left[\psi^T \beta\right] d\xi - \\ &- \int_{\xi} \psi E_1^T \left[\psi^T \beta\right] d\xi G^{-1} \int_{\xi_{(1)}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\left[\psi^T \beta\right] E_1 \left[\psi^T \beta\right] d\xi \end{aligned} \qquad (1.40)$$

(в отличие от двухточечной краевой задачи для системы подобных уравнений, полученных в п. 1.3 при использовании аналогичного разложения). Очевидно, что решение системы уравнений (1.40) вполне может быть реализовано в реальном масштабе времени современными вычислительными средствами – например, в бортовом вычислителе при управлении движением объекта на основе текущей информации о навигационных параметрах.

Для сравнительного анализа рассматриваемого подхода с предложенным ранее с точки зрения вычислительных затрат и эффективности формирования управления был проведен синтез управления U нелинейным объектом (п. 1.3.3):

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= -a\xi^3 + u + n, \\ \xi(t_0) &= 0, \qquad a = const. \end{aligned} \qquad (1.41)$$

где n– белый гауссовский шум с интенсивностью D_n;
но при условии наблюдения его состояния с помощью измерителя

$$z = b\xi^2 + w,$$
$$b = const.$$

w – белый гауссовский шум с интенсивностью D_W;
и при выборе в качестве критерия оптимальности локального критерия, аналогичного рассмотренному в п. 1.3.3:

$$J = \int\limits_{\xi_{(1)}} [-\rho(\xi,t)] d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\xi_{(2)}} D^2 u^2(\xi,t) d\xi dt.$$

Учитывая, что в этом случае $u(\xi,t) = \psi^T U_t$, $E_0(\xi) = \psi^T(\xi)$, $E_1[\rho] = \partial[\psi(\xi)\rho(\xi,t)]/\partial\xi$, $\Phi_1[\rho] = -\rho$, выражение для оптимального вектора управления получаем в следующем виде:

$$U_t = -\frac{1}{2D^2}\left[\int\limits_{\xi_{(2)}} \psi(\xi)\psi^T(\xi) d\xi\right]^{-1} \int\limits_{\xi_{(1)}} \frac{\partial}{\partial\xi}[\psi(\xi)\rho(\xi,t)] d\xi,$$

а полагая интервал $\xi_{(2)}$ совпадающим с отрезком ортогональности функций ψ (что естественно при адекватном формировании «энергетической» части критерия оптимизации) и $\xi_{(1)} = [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$, окончательно имеем

$$U_t = \frac{1}{2D^2}\{\psi(\xi_{\min})\rho(\xi_{\min},t) - \psi(\xi_{\max})\rho(\xi_{\max},t)\}.$$

Сравнивая полученное управление с приведенным в п. 1.3.3, следует отметить, что, несмотря на его локальный характер, оно, во-первых, является точным, во-вторых, позволяет при управлении объектом осуществить использование текущих измерений z (ρ в данном случае – АПВ), а, в третьих, оказывается существенно более простым. Уравнение для вектора коэффициентов разложения β плотности $\rho = \psi^T\beta$ также гораздо проще и имеет вид

$$\dot{\beta} = \int\limits_{\xi_{(2)}} \psi\left[B_1(\psi,\xi) + 3\xi^2 a\psi^T + B_0(\psi,z,\xi)\right] d\xi\beta -$$
$$- \int\limits_{\xi_{(2)}} \psi \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\psi^T\left(\psi^T\beta\right)\right] d\xi \frac{1}{2D^2}\left\{\psi(\xi_{\min})\psi^T(\xi_{\min}) - \psi(\xi_{\max})\psi^T(\xi_{\max})\right\}\beta,$$

где выражение для B_1 совпадает с приведенным в п. 1.3.3:

$$B_1(\psi,\xi)=\frac{D_n}{2}\frac{\partial^2\psi^T}{\partial\xi^2}+a\xi^3\frac{\partial\psi^T}{d\xi},$$

$$B_0(\psi,z,\xi)=-\frac{1}{2D_W}\left[\left(z-b\xi^2\right)^2+\int\limits_{\xi_{(2)}}\left(z-b\xi^2\right)^2\psi^T(\xi)d\xi\beta\right]\psi^T(\xi).$$

Для сравнительного анализа обоих подходов к синтезу управления объектов (1.11) было проведено численное моделирование процесса управления, реализованного аналогично – для 30 стохастических траекторий движения объекта при параметрах, приведенных в п. 1.3.3, и на временном интервале $T = [0,100]$ с. Вектор функции разложения ψ был сформирован идентично вектору φ в п. 1.3.3 из первых четырех функций ряда Фурье, $D_W = 0,5$; $b = 0,95$; $\xi_{\min} = -0,5$; $\xi_{\max} = 0,5$. Интегрирование уравнений для вектора β осуществлялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0,02 с, оценка точности управления производилась аналогично п. 1.3.3 путем усреднения по ансамблю реализаций среднемодульных отклонений отдельно взятых траекторий от границ интервала $\xi_{(1)}$ в течение времени T. В результате моделирования было установлено, что при практически одинаковой точности обоих управлений (отличие погрешностей обеспечения существования переменной ξ в заданной области составило менее 2%) требуемый объем памяти вычислителя при реализации локального управления сократился в ~ 7 раз при одновременном уменьшении времени вычислений в ~ 3,3 раза. Это позволяет сделать вывод о возможности и эффективности применения предложенного метода для синтеза управления реальными объектами на основе использования измерительной информации о параметрах состояния данных объектов.

В заключение данного параграфа рассмотрим возможность синтеза локально-оптимального управления U без привлечения конечного разложения (1.35) (являющегося в какой то степени упрощающим допущением при синтезе закона управления). В этом случае условие (1.34) должно быть записано уже следующим образом (для большей наглядности полагаем далее $\xi_{(1)} = \xi_{(2)} = \xi$):

$$\max_U\left(-\dot{J}\right)=\max_U\left\{-\int\limits_{\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\cdot\dot{\rho}+\Phi_2[U]\right)d\xi\right\}=$$

$$=\max_U\left\{-\int\limits_{\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\left\{S[\rho]-\sum_i\frac{\partial U_i}{\partial\xi_i}\rho+U_i\frac{\partial\rho_i}{\partial\xi_i}\right\}+\Phi_2[U]\right)d\xi\right\},$$

где индекс i введен для обозначения i-го компонента соответствующего вектора.

Анализ полученного выражения показывает, что решение поставленной задачи сводится к классической задаче отыскания вектор-функции U, реализующей минимум определенного интеграла

$$\int_{\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\left\{S[\rho]-\sum_i\frac{\partial U_i}{\partial\xi_i}\rho+U_i\frac{\partial\rho_i}{\partial\xi_i}\right\}+\Phi_2[U]\right)d\xi .$$

При этом искомая вектор-функция U должна удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$-\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\cdot\rho\right)+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}-\frac{\partial}{\partial U_i}\Phi_2[U]=0$$

или

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)\right]\rho+\frac{\partial}{\partial U_i}\Phi_2[U]=0,\quad i=\overline{i,N}\ .$$

В векторной форме данная система принимает вид:

$$\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial U}\right)^T=-\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)\right]^T\rho\,,$$

из которого следует, что в общем случае определение вектора U требует решения нелинейного векторного уравнения, представляющего собой непростую вычислительную задачу. В случае квадратичной формы функции Φ_2 решение данного уравнения легко находится аналитически:

$$\left(2U_{\text{опт}}^T\right)^T=-\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)\right]^T\rho\,,$$

т.е.

$$U_{\text{опт}}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)\right]^T\rho\,,$$

где функция ρ определяется из решения нелинейного уравнения, полученного после подстановки $U_{\text{опт}}$ в уравнение (1.36):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=S[\rho]+\frac{1}{2}div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)\right]^T\rho^2\right\}.$$

Необходимо при этом, как и ранее, отметить, что с вычислительной точки зрения решение этого уравнения оказывается ненамного сложнее, чем решение исходного уравнения (1.36).

1.4.3. Субоптимальное локальное дуальное управление стохастическими объектами

Несмотря на очевидные преимущества рассмотренного в п. 1.4.2 точного локального управления перед терминальным с точки зрения вычислительных затрат, следует, тем не менее, отметить, что его реализация сопряжена с решением наиболее «тяжелого» в вычислительном отношении уравнения – нелинейного интегро-дифференциального уравнения с частными производными вида (1.39). В связи с этим представляет практический интерес синтез уже не оптимального локального управления, а субоптимального, но формируемого на основе решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как уже было отмечено выше, в подавляющем большинстве практических случаев анализа и синтеза стохастических систем используется гауссовская аппроксимация $\widetilde{\rho}$, обеспечивающая требуемый компромисс между точностью оценивания и объемом вычислительных затрат и позволяющая свести задачу апостериорного оценивания к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений параметров плотности (1.8):

$$\dot{\hat{\xi}} = f\left(\hat{\xi},t\right) + u\left(\hat{\xi},t\right) + K\left(\hat{\xi},t\right)\left[Z - H\left(\hat{\xi},t\right)\right] = G_1\left(\hat{\xi},P,Z,t\right) + u\left(\hat{\xi},t\right);$$

$$K\left(\hat{\xi},t\right) = P\frac{\partial^T H}{\partial\hat{\xi}}\left(\hat{\xi},t\right)D_W^{-1}(t);$$

$$\dot{P} = \frac{\partial f\left(\hat{\xi},t\right)}{\partial\hat{\xi}}P + P\frac{\partial f^T\left(\hat{\xi},t\right)}{\partial\hat{\xi}} + f_0\left(\hat{\xi},t\right)f_0^T\left(\hat{\xi},t\right) - K\left(\hat{\xi},t\right)D_W(t)K^T\left(\hat{\xi},t\right) +$$

$$+\frac{\partial u\left(\hat{\xi},t\right)}{\partial\hat{\xi}}P + P\frac{\partial u^T\left(\hat{\xi},t\right)}{\partial\hat{\xi}} = G_2\left(\hat{\xi},P,t\right) + \frac{\partial u}{\partial\hat{\xi}}P + P\frac{\partial u^T}{\partial\hat{\xi}},$$

где $\hat{\xi} = \left(\hat{\xi}_1,...,\hat{\xi}_N\right)$ – вектор апостериорного математического ожидания;

$P = \|P_{ik}\|$ – апостериорная ковариационная матрица.

Следуя изложенному в п. 1.4.2, представим далее вектор u в виде конечного разложения (1.35).

Ввиду того, что дальнейшее решение задачи предполагает операции с вектором параметров АПВ $\widetilde{\rho}$, то, используя введенное выше в п. 1.1 правило преобразования матрицы A в соответствующий вектор, а также приложение 3, и учитывая представление (1.35), преобразуем приведенные выше уравнения параметров $\widetilde{\rho}$ к единой векторной форме:

$$\dot{\widehat{\xi}} = G_1\left(\widehat{\xi}, R, Z, t\right) + E_0\left(\widehat{\xi}\right)U_t,$$

$$\left(\dot{P}\right)^{(v)} = G_2^{(v)}\left(\widehat{\xi}, P, t\right) + \left(P \otimes E\right)\left[\frac{\partial \widehat{E_0}\left(\widehat{\xi}\right)}{\partial \widehat{\xi}}\right]U_t + \left(E \otimes P\right)\left[\frac{\partial E_0\left(\widehat{\xi}\right)}{\partial \widehat{\xi}}\right]^* U_t =$$

$$= G_2^{(v)}\left(\widehat{\xi}, P, t\right) + G_3\left(\widehat{\xi}, P\right)U_t,$$

$$G_3\left(\widehat{\xi}, P\right) = \left(P \otimes E\right)\left[\frac{\partial \widehat{E_0}\left(\widehat{\xi}\right)}{\partial \widehat{\xi}}\right] + \left(E \otimes P\right)\left[\frac{\partial E_0\left(\widehat{\xi}\right)}{\partial \widehat{\xi}}\right]^*,$$

$\left[\frac{\partial E_0\left(\widehat{\xi}\right)}{\partial \widehat{\xi}}\right]$ – введенная в прил. 3 операция вертикальной последовательной переориентации блоков блочной матрицы $\frac{\partial E_0}{\partial \widehat{\xi}}$;

$\left[\frac{\partial E_0\left(\widehat{\xi}\right)}{\partial \widehat{\xi}}\right]^*$ – операция формирования блочной матрицы путем образования ее блоков из соответствующих строк исходной матрицы (прил. 3).

Полученные уравнения позволяют записать для расширенного вектора параметров $Y = \begin{vmatrix} \widehat{\xi} \\ P^{(v)} \end{vmatrix}$ плотности $\widetilde{\rho}$ его зависимость от искомого вектора управления U_t в следующей простой форме:

$$\dot{Y} = \begin{vmatrix} G_1(Y, Z, t) \\ G_2^{(v)}(Y, t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_0(Y) \\ G_3(Y) \end{vmatrix} U_t = G_0 + GU_t. \tag{1.42}$$

Исходя из изложенного, задачу синтеза локально-оптимального управления объектом (1.1) окончательно сформулируем как задачу поиска вектора U_t, обеспечивающего оптимум функционала J (1.11) при условии, что вектор параметров Y плотности $\widetilde{\rho}(\xi, Y)$, аппроксимирующей функцию АПВ вектора состояния ξ, описывается уравнением (1.42).

Для решения поставленной задачи используем тот же известный факт, что и ранее: при неотрицательно определенной критериальной функции для обеспечения ее минимального значения в каждый момент времени достаточно, чтобы производная ее по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум [28]. Отсюда для рассматриваемого случая получаем условие для определения искомого уравнения:

$$\max_U\left\{-\dot{J}\right\}=\max_U\left\{-\left(\int\limits_{\xi_{(1)}}\frac{\partial\Phi_1[\rho]}{\partial\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}(\xi,Y)}{\partial Y}\dot{Y}d\xi+\int\limits_{\xi_{(2)}}\Phi_2[U]d\xi\right)\right\}.$$

Подставляя в (1.43) выражение для правой части уравнения (1.42) и учитывая представление (1.35), имеем следующее уравнение относительно U_t:

$$\frac{\partial}{\partial U_t}\left\{\int\limits_{\xi_{(1)}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial Y}d\xi\left(G_0+GU_t\right)+\int\limits_{\xi_{(2)}}\Phi_2[E_0U_t]d\xi\right\}=0.$$

Из данного уравнения вытекает окончательное уравнение для определения субоптимального вектора U_t:

$$-\int\limits_{\xi_{(1)}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}_0}{\partial Y}d\xi G=\int\limits_{\xi_{(2)}}\frac{\partial\Phi_2}{\partial U_t}[E_0U_t]d\xi, \qquad (1.44)$$

решение которого осуществляется, исходя из конкретного вида функции Φ_2.

Дальнейший анализ и сравнение данного – субоптимального, подхода с предложенным выше оптимальным проведем на примере традиционной квадратичной формы функции $\Phi_2(U)=U(\xi,t)^T DU(\xi,t)$.

Уравнение (1.44) в этом случае принимает вид

$$-\int\limits_{\xi_{(1)}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial Y}d\xi G=U_t^T\int\limits_{\xi_{(2)}}E_0^T\left(D^T+D\right)E_0d\xi, \qquad (1.45)$$

откуда

$$U_t=-G_*^{-1}G^T\int\limits_{\xi_{(1)}}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial Y}\right)^T d\xi,$$

где $G_*^{-1}=\int\limits_{\xi_{(2)}}E_0^T\left(D^T+D\right)E_0d\xi=const$ – известная симметричная матрица.

Выражение (1.45) позволяет, как и прежде, легко учесть возможные в общем случае ограничения на вектор U_t (например, $|U_t| \le U_{\max}$) при известных текущих значениях гауссовской функции $\tilde{\rho}$, формируемых на основе решения уравнений (1.42) после подстановки в них выражения (1.45):

$$\dot{Y} = G_0 - G \cdot G_*^{-1} G^T \int\limits_{\xi_{(1)}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi \ . \qquad (1.46)$$

Таким образом, задача синтеза субоптимального в смысле (1.11) управления сводится, по существу, к интегрированию системы уравнений (1.46) с последующей реализацией соотношения (1.45), в отличие, например, от терминального оптимального подхода, требующего решения двухточечной краевой задачи для системы уравнений с частными производными, или от локально-оптимального, приводящего к необходимости решения интегро-дифференциального уравнения с частными производными.

Очевидно, что описанный метод управления может быть легко реализован в реальном масштабе времени поступления измерительной информации, например, в бортовом вычислителе при управлении движением объекта на основе текущей информации о навигационных параметрах.

Пример 4. Для сравнительного анализа рассматриваемого подхода с предложенными ранее с точки зрения вычислительных затрат и эффективности формирования управления был проведен синтез управления U нелинейным объектом (1.41):

$$\begin{aligned} &\dot{\xi} = -a\xi^3 + u + n; \\ &\xi(t_0) = 0; \qquad a = const, \end{aligned}$$

где n – белый гауссовский шум с интенсивностью D_n;
при условии наблюдения его состояния с помощью того же измерителя

$$\begin{aligned} &z = b\xi^2 + w; \\ &b = const, \end{aligned}$$

w – белый гауссовский шум с интенсивностью D_W;
и при выборе в качестве критерия оптимальности следующего локального критерия:

$$J = \int\limits_{\xi_{(1)}} [-\rho(\xi, t)] d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\xi_{(2)}} D^2 u^2(\xi, t) d\xi dt.$$

Учитывая, что в этом случае $u(\xi,t)=\psi^T U_t$, $E_0(\xi)=\psi^T(\xi)$, $\Phi_1[\rho]=-\rho, \tilde{\rho}$ – гауссовская плотность, вектор параметров $Y=\begin{vmatrix}\hat{\xi}\\ P\end{vmatrix}$ которой описывается уравнениями

$$\dot{\hat{\xi}}=-a\hat{\xi}^3+K\left(z-b\hat{\xi}^2\right)+\psi^T U_t,$$

$$K=K\left(\hat{\xi},P\right)=2Pb\hat{\xi}D_W^{-1},$$

$$\dot{P}=-6a\hat{\xi}^2P+D_n^2-KD_WK+2P\frac{\partial\psi^T}{\partial\hat{\xi}}U_t,$$

или в форме (1.42):

$$\dot{Y}=G_0+GU_t,\qquad G_0=\begin{vmatrix}-a\hat{\xi}^3+K\left(z-b\hat{\xi}^2\right)\\ -6a\hat{\xi}^2P+D_n^2-KD_WK\end{vmatrix},$$

$$G=\begin{vmatrix}\psi^T\\ 2P\dfrac{\partial\psi^T}{\partial\hat{\xi}}\end{vmatrix},$$

выражение для субоптимального вектора управления получаем в следующем виде:

$$U_t=\frac{1}{2D^2}\left[\int\limits_{\xi_{(2)}}\psi(\xi)\psi^T(\xi)d\xi\right]^{-1}\left|\psi \;\vdots\; 2P\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\xi}}\right|\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi P}}\int\limits_{\xi_{(1)}}\begin{vmatrix}\dfrac{\hat{\xi}-\xi}{P}\\ \dots\dots\dots\\ \dfrac{\left(\xi-\hat{\xi}\right)^2}{2P^2}\end{vmatrix}\exp\left[-\frac{\left(\xi-\hat{\xi}\right)^2}{2P}\right]d\xi.$$

Полагая интервал $\xi_{(2)}$ совпадающим с отрезком ортогональности функций ψ: $\xi_{(1)}=[\xi_{\min},\xi_{\max}]$, окончательно имеем:

$$U_t=\frac{1}{2D^2P\sqrt{2\pi P}}\left|\psi \;\vdots\; 2P\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\xi}}\right|\int\limits_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}}\begin{vmatrix}\hat{\xi}-\xi\\ \dfrac{\left(\xi-\hat{\xi}\right)^2}{2P}\end{vmatrix}\exp\left[-\frac{\left(\xi-\hat{\xi}\right)^2}{2P}\right]d\xi.$$

Сравнивая полученное управление с приведенными выше, следует отметить, что оно, во-первых, позволяет при управлении объектом осуществить использование текущих измерений в реальном масштабе времени, а, во-вторых, оказывается существенно более простым.

Заключая вышеизложенное, необходимо подчеркнуть, что использование приведенных выше обобщенных вероятностных критериев позволило не только перейти к рассмотрению наиболее общего случая синтеза стохастического управления, но также определило путь и возможность принципиального решения данной задачи. Более того, универсальность использованного при этом аппарата теории управления системами с распределенными параметрами позволяет решить на базе разработанного подхода ряд других важных задач теории стохастических систем, рассматриваемых в последующих разделах книги.

1.4.4. Апостериорное управление объектом с неопределенной структурой

Все предыдущие построения апостериорного управления были основаны на традиционном допущении об известном характере правой части управляемого объекта. В то же время в ряде практических задач априорное знание структуры объекта оказывается весьма затруднительным, что приводит к необходимости одновременной организации процессов идентификации (оценки) состояния объекта и управления им. Как известно, до настоящего времени принципиальное решение подобной задачи отсутствует [163, 147].

Дополнительным достоинством рассмотренного выше подхода является то немаловажное обстоятельство, что с его использованием удается получить искомое решение данной проблемы. Рассмотрим его подробно.

Пусть объект, как и ранее, наблюдается традиционным нелинейным зашумленным измерителем

$$Z = H(\xi, t) + W_t ,$$

где Z – вектор выходных сигналов измерителя,

$H(\xi,t)$ – известная нелинейная вектор-функция,

W_t – центрированный белый гауссовский вектор-шум с матрицей интенсивности $D_W(t)$.

В общем виде управляемый объект с неопределенной структурой можно представить как

$$\dot{\xi} = U(\xi, t) + V(\xi, t),$$

где $V(\xi,t)$ – неизвестная (и подлежащая идентификации по показаниям Z) вектор-функция, определяемая физическими свойствами объекта,

$U(\xi,\mathrm{t})$ – синтезируемая вектор-функция управления.

Очевидно, что при подобной постановке проблемы центральную роль играет выбор критериев, определяющих качество идентификации и требования к эффективности управления. В силу случайного характера наблюдений, а также априорной неопределенности структуры объекта, целесообразно в качестве оптимизируемых критериев, по-прежнему, выбирать стохастические критерии, зависящие в общем случае от апостериорной плотности вероятности $\rho(\xi,t)$ наблюдаемого вектора состояния ξ (и, естественно, вектор-функций U и V).

При решении задачи первого этапа – задачи идентификации, исходя из физического смысла последней, в качестве наиболее адекватной формы минимизируемого функционала J целесообразно использовать аддитивную совокупность двух функционалов, оптимизация первого из которых: $J_1 = \int\limits_{\xi} \Phi_1[\rho(\xi,t)]d\xi$, должна обеспечить минимум неопределенности (максимальную информативность) идентифицируемого вектора ξ, второго $J_2 = \int\limits_{\xi} \Phi[V(\xi,t)]d\xi$ – минимум «энергетики» (в соответствии с принципом Ферма) идентифицируемой системы, т.е.

$$J = \int\limits_{\xi} \{\Phi_1[\rho(\xi,t)] + \Phi_2[V(\xi,t)]\}d\xi .$$

В соответствии с изложенным ранее, функцию Φ_1 можно выбирать как ядро функционала энтропии Шеннона $(\Phi_1 = -\rho\ln\rho)$ или Фишера $\left(\Phi_1 = -\rho\left[\frac{\partial\ln\rho}{\partial\xi}\right]\left[\frac{\partial\ln\rho}{\partial\xi}\right]^T\right)$ — так называемых «информационных» функционалов, а Φ_2 – в виде классической – квадратичной, «энергетической» формы, заданной на текущем интервале времени: $\Phi_2 = \int\limits_{t_0}^{t} V^T V dt = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_2^*[V]dt$.

В связи с этим в окончательной постановке исследуемую задачу идентификации сформулируем как задачу синтеза вектора V, обеспечивающего минимум функционала

$$J = \int\limits_{\xi} \Phi_1[\rho]d\xi + \int\limits_{t_o}^{t}\int\limits_{\xi} \Phi_2^*[V]d\xi dt, \qquad (1.47)$$

определенного на множестве решений известного интегро-дифференциального уравнения, описывающего АПВ $\rho(\xi,t)$ процесса ξ:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -div\{(U+V)\rho\} + [F - F_0]\rho = S[\rho] - div\{(U+V)\rho\}. \qquad (1.48)$$

В силу неизбежности положительной определенности информационных функционалов, а также «энергетической» составляющей Φ_2 критерия J (1.47), для решения поставленной задачи, по-прежнему, используем тот факт, что при неотрицательно определенной критериальной функции для обеспечения ее минимального значения в каждый момент времени достаточно, чтобы производная ее по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум [28]. В данном случае это приводит к следующему условию:

$$\max_V(-\dot{J}) = \max_V\left\{-\int_\xi\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\cdot\dot{\rho} + \Phi_2^*[V]\right)d\xi\right\} =$$

$$= \max_V\left\{-\int_\xi\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\left\{S[\rho] - \sum_i\frac{\partial u_i}{\partial\xi_i}\rho + u_i\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i} - \sum_i\frac{\partial V_i}{\partial\xi_i}\rho + V_i\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}\right\} + \Phi_2^*[V]\right)d\xi\right\},$$

где индекс i введен для обозначения i-го компонента соответствующего вектора.

Анализ полученного выражения показывает, что решение задачи сводится к проблеме отыскания вектор-функции V, реализующей минимум определенного интеграла

$$\int_\xi\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\left\{S[\rho] - \sum_i\frac{\partial u_i}{\partial\xi_i}\rho + u_i\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i} - \sum_i\frac{\partial V_i}{\partial\xi_i}\rho + V_i\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}\right\} + \Phi_2^*[V]\right)d\xi.$$

При этом искомая вектор-функция V должна удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$-\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\cdot\rho\right) + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial\xi_i} - \frac{\partial}{\partial v_i}\Phi_2^*[V] = 0$$

или

$$\left[\frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)\right]\rho + \frac{\partial}{\partial v_i}\Phi_2^*[V] = 0, \qquad i = \overline{i, N}.$$

В векторной форме данная система принимает вид:

$$\left(\frac{\partial\Phi_2^*}{\partial V}\right)^T = -\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)\right]^T\cdot\rho, \qquad (1.49)$$

из которого следует, что в общем случае определение вектора V требует решения нелинейного векторного уравнения, представляющего собой непростую вычислительную задачу. В частном случае квадратичной формы функции Φ_2^* решение уравнения (1.49) находится аналитически:

$$\left(2V_{\text{опт}}^T\right)^T = -\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho,$$

т.е.

$$V_{\text{опт}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho,$$

где функция ρ определяется из решения уже нелинейного уравнения, полученного после подстановки $V_{\text{опт}}$ в уравнение (1.48):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S[\rho] + \frac{1}{2} div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho^2\right\} - div(U\rho) = S_1[\rho] - div(U\rho). \quad (1.50)$$

Неопределенная по окончании этапа идентификации функция управления $U(\xi,t)$, входящая в правую часть уравнения (1.50), далее может быть сформирована с использованием подхода, аналогичного вышеизложенному. При этом выбор оптимизируемых (минимизируемых) функционалов осуществляется, исходя из особенностей конкретной решаемой задачи. Так, если «энергетическую» часть критерия оптимальности управления можно задавать, пользуясь прежними соображениями, в форме $\int\limits_{\xi}\int\limits_{t_0}^{t} \Phi_2^*[U]\,dt\,d\xi$, то вторую его часть необходимо выбирать, исходя из функциональных требований к управляемому процессу. (Типичными примерами таких требований могут служить требования к минимуму отклонений от заданных значений математического ожидания процесса, его дисперсии или других вероятностных характеристик.) В этом случае (см. п. 1.2) в общем виде критерий оптимального управления может быть представлен как

$$J_y = \int\limits_{\xi} \Phi_3[\xi, \rho(\xi,t)]\,d\xi + \int\limits_{\xi}\int\limits_{t_0}^{t} \Phi_2^*[U]\,dt\,d\xi, \quad (1.51)$$

и задача синтеза оптимального управления $U(\xi,t)$ может быть сформулирована как задача поиска вектор-функции U, доставляющей минимум (1.51) на множестве функций $\rho(\xi,t)$, удовлетворяющих решению (1.50). Так как данная задача с точностью до обозначений совпадает с вышеприведенной, то и алгоритм ее решения оказывается тем же. Повторяя прежние вычисления, приходим к уравнению для оптимального управления $U(\xi,t)$, аналогичному (1.49):

$$\left(\frac{\partial \Phi_2^*}{\partial U}\right)^T = -\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho,$$

откуда для традиционного случая квадратичной формы Φ_2 имеем:

$$U_{опт} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho .$$

Очевидно, что в этом случае функция АПВ, определяющая уже выражения как для $U_{опт}(\xi,t)$, так и для $V_{опт}(\xi,t)$, является решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= S_1[\rho] + \frac{1}{2} div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \rho}\right)\right]^T\right\}\rho^2 = \\ &= S(\rho) + \frac{1}{2} div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\Phi_1 + \Phi_3)\right)\right]^T \rho^2\right\} \end{aligned} . \tag{1.52}$$

При этом с вычислительной точки зрения решение уравнения (1.52) оказывается ненамного сложнее, чем решение исходного уравнения (1.48).

В завершение исследования поставленной задачи важно отметить особенности формирования управления U для случая, когда управление может быть сформировано только в функции вектора измерений Z (но не вектора состояния ξ). Действительно, если при управлении каким-либо технологическим процессом регулирование осуществляется по его параметрам состояния – давлению, температуре, расходу рабочего тела и пр. без их измерения, то при управлении, например, летательным аппаратом, регулирование движения возможно только на основании измерения переменных его состояния – углов ориентации, скорости полета и др. навигационных параметров.

В связи с этим возникает задача синтеза вектора управления U только в функции вектора Z при сохранении сделанных выше предположений о характере объекта и наблюдателя (случай менее общий по отношению к уже исследованному).

Следуя прежним рассуждениям, минимизируемый критерий в данном случае сформируем уже как:

$$J_y = \int_{\xi} \Phi_3[\xi, \rho(\xi,t)]d\xi + \int_{t_0}^{t} \Phi_2^*[U]dt, \tag{1.53}$$

так как согласно исходному предположению $U = U(Z,t)$.

При этом уравнение АПВ (1.50) имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = S_1[\rho] - div[U(z,t)\rho(\xi,t)] = S_1[\rho] - \frac{\partial\rho}{\partial\xi}U,$$

а условие минимума функционала (1.53), соответственно:

$$\max_U(-\dot{J}_y) = \max_U\left\{-\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\rho}\dot{\rho}d\xi - \Phi_2^*(U)\right\}.$$

Из последнего вытекает уравнение относительно искомого $U_{опт}(Z,t)$:

$$\frac{\partial\Phi_2^*[U]}{\partial U} = \int_{\xi}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}d\xi,$$

откуда для квадратичной формы Φ_2^* имеем:

$$U_{опт}(Z,t) = \frac{1}{2}\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)^T d\xi.$$

При этом функция АПВ ρ окончательно определяется из нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = S[\rho] + \frac{1}{2}div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\right)\right]^T\rho^2\right\} - \frac{1}{2}\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)^T d\xi,$$

при решении которого могут быть использованы соображения, приведенные выше.

Для анализа возможности практического применения разработанного подхода рассмотрим следующий пример.

Пример 5. Объект, задаваемый уравнением с правой частью $V(\xi,t) = -\xi^3$ и искомым управлением $U(\xi,t)$

$$\dot{\xi} = U(\xi,t) + V(\xi,t),$$

наблюдается измерителем, описываемым уравнением

$$Z = 1{,}5\xi^2 + W_t,$$

где W_t – белый гауссовский центрированный шум с интенсивностью D_W.

Наблюдателю, которому вид правой части уравнения объекта apriori неизвестен, необходимо синтезировать такую функцию V, которая обеспечивала бы в текущий момент времени максимум информации о состоянии объекта, и управление U, обеспечивающее при этом минимум отклонения его АПВ ρ от нормированной гауссовской $N(0,1;\xi)$ $\forall \xi \in [-\infty, \infty]$. В качестве меры информации рассмотрим функционал Шеннона, тогда в соответствии с вышеизложенным минимизируемый критерий идентификации принимает вид:

$$J = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi,t) \ln \rho(\xi,t) d\xi + \int_{t_0}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} V^2(\xi,t) d\xi \, dt,$$

а критерий управления, соответственно:

$$J_y = \int_{-\infty}^{\infty} [\rho(\xi,t) - N(0,1;\xi)]^2 d\xi + \int_{t_0}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} U^2(\xi,t) d\xi \, dt.$$

Функция апостериорной плотности распределения ρ в рассматриваемом случае описывается уравнением Стратоновича вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{2D_w} \left\{ 3Z \left(\xi^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \rho d\xi \right) + 2{,}25 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^4 \rho d\xi - \xi^4 \right) \right\} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \xi}((U+V)\rho) = S(\rho) - \frac{\partial}{\partial \xi}((U+V)\rho).$$

Формируя согласно вышеприведенному условие оптимальности, на этапе идентификации имеем:

$$\max_V \left(-\dot{J} \right) = \max_V \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 + \ln \rho) \dot{\rho} - V^2 \right] d\xi \right\} =$$

$$= \max_V \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1+\ln\rho)S(\rho) - (1+\ln\rho)\rho \frac{\partial V}{\partial \xi} - (1+\ln\rho)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} V - V^2 \right] d\xi \right\} =$$

$$= \max_V \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(B_0(\rho,\xi) + B_1(\rho,\xi)\frac{\partial V}{\partial \xi} + B_2(\rho,\xi)V - V^2 \right) d\xi \right\}.$$

Уравнение Эйлера, исходное для построения искомой правой части уравнения объекта, имеет вид:

$$\frac{\partial B_1(\rho,\xi)}{\partial \xi} - B_2(\rho,\xi) + 2V = 0.$$

Как и в рассматриваемом общем случае, идентификация здесь осуществляется в явном виде:

$$V = \frac{1}{2}\left(B_2 - \frac{\partial B_1}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}.$$

Рассуждая аналогично вышеизложенному, определяем оптимальное управление U:

$$U = \rho\left(\frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right).$$

Тогда уравнение АПВ ρ принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S(\rho) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\rho^2) + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\partial N}{\partial \xi} \right)\rho^2 \right].$$

Решение данного уравнения осуществлялось методом прямоугольных сеток на интервале $\xi \in [-30;30]$ с шагом $\Delta\xi = 0{,}05$ при D_W=1,5, $\rho(\xi, t_0) = N(0{,}1;0{,}3;\xi)$ для каждого $Z(t_i)$, полученного в результате численного моделирования уравнений объекта и наблюдателя на интервале $t \in [0{,}100c]$ методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $\Delta t = 0{,}05$ с. (Формирование управления U происходило при этом в масштабе времени поступления измерительной информации, т.е. для каждого временного шага моделирования t_i). По окончании времени моделирования интегральное квадратичное отклонение АПВ $\rho(\xi)$ от требуемой N(0,1;ξ) составило всего

~0,08 – все это позволяет сделать вывод о возможности эффективного использования предложенного подхода также и для управления объектами с априорно неопределенной структурой.

1.5. Синтез дуального управления на основе квадратичных функционалов оценивания

Помимо рассмотренного выше подхода к синтезу апостериорного – дуального, управления, могут быть рассмотрены и другие варианты синтеза, базирующиеся на принципиально иных идеях и методах управления. Рассмотрим ниже один из них.

Как и ранее, исследуем далее управляемый динамический объект, описываемый системой уравнений

$$\dot{\xi} = f[\xi, t] + u(\xi, t) + f_0[\xi, t]n, \quad \xi(t_0) = \xi_0, \qquad (1.54)$$

и наблюдаемый нелинейным измерителем

$$z = H(\xi, t) + w, \qquad (1.55)$$

где ξ – N-мерный вектор состояния объекта;

u– N-мерная векторная функция управления;

n– r-мерный вектор шумов объекта;

f, f_0 – известные нелинейные векторная и матричная функции соответствующих размерностей;

z – q-мерный вектор выходных сигналов измерителя параметров состояния объекта;

H – q-мерная нелинейная вектор-функция наблюдения;

w – q-мерный вектор помехи измерений.

Шумы $w(t)$ и $n(t)$ считаются белыми гауссовскими с нулевыми математическими ожиданиями, так что [1]

$$M\left\{w(t)w^T(\tau)\right\} = K_w(t)\delta(t-\tau),$$

$$M\left\{n(t)n^T(\tau)\right\} = K_n(t)\delta(t-\tau).$$

В дальнейшем будем предполагать, что плотность $\rho[\xi(t_0)]$ известна и является нормальной со средним μ_{ξ_0} и ковариационной матрицей D_{ξ_0}.

В исследуемом случае под оптимальной оценкой $\tilde{\xi}$ будем понимать оценку по критерию максимума апостериорной вероятности ρ процесса ξ, что при выполнении предположений о гауссовости n и w требует [63] для определения $\tilde{\xi}$ решения задачи минимизации квадратичного функционала $J_н$

$$J_н = \frac{1}{2}\left[\xi(t_0) - \mu_{\xi_0}\right]^T D_{\xi_0}^{-1}\left[\xi(t_0) - \mu_{\xi_0}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k}\left\{\left[z(t) - H(\tilde{\xi},t)\right]^T K_w^{-1}(t)\left[z(t) - H(\tilde{\xi},t)\right] + n^T(t) K_n^{-1}(t) n(t)\right\} dt. \quad (1.56)$$

При существующих подходах к решению задач оценивания обычно предполагается, что в исследуемых моделях $u = 0$ [63, 147]. Однако, в силу постановки рассматриваемой задачи далее считаем, что $u \neq 0$ и сформулируем задачу последующего синтеза управления объектом (1.54), наблюдаемого измерителем (1.55), как задачу минимизации некоторого заданного нового функционала J_y:

$$J_y = \int_{t_0}^{t_k} Q\left[\tilde{\xi}, u, t\right] dt, \quad (1.57)$$

где Q – заданная нелинейная функция.

Исходя из изложенного, задачу синтеза искомого дуального управления объектом (1.54) на временном интервале $t \in [t_0, t_k]$ окончательно сформулируем как задачу определения вектора u, формируемого на основе использования вектора измерений (1.55) и оптимального в смысле (1.57), при условии одновременной оценки вектора состояния объекта, оптимальной по критерию (1.56).

Для решения задачи оптимального оценивания и минимизации функционала (1.56) при ограничениях, задаваемых уравнениями (1.54) движения объекта, воспользуемся принципом максимума и сформируем гамильтониан [63]

$$H_*\left(\tilde{\xi}, \lambda, u, t\right) = \frac{1}{2}\left[z - H(\tilde{\xi},t)\right]^T K_w^{-1}\left[z - H(\tilde{\xi},t)\right] +$$

$$+\frac{1}{2} n^T K_n^{-1} n + \lambda^T\left\{f(\tilde{\xi},t) + u(\tilde{\xi},t) + f_0(\tilde{\xi},t) n\right\}, \quad (1.58)$$

где λ – вектор сопряженных переменных.

Тогда система сопряженных уравнений [63, 147], определяющая решение задачи оптимальной оценки вектора состояния объекта, имеет вид:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H_*^T}{\partial \tilde{\xi}}, \qquad \dot{\tilde{\xi}} = \frac{\partial H_*}{\partial \lambda} \quad (1.59)$$

при граничных условиях:

$$\tilde{\xi}(t_0)=\tilde{\xi}_0=M\{\xi_0\}, \quad \lambda(t_k)=0. \tag{1.60}$$

Следуя [63] и осуществляя необходимые преобразования в (1.59), получаем двухточечную краевую задачу

$$\dot{\tilde{\xi}}=f(\tilde{\xi},t)+u(\tilde{\xi},t)-f_0(\tilde{\xi},t)K_n f_0^T(\tilde{\xi},t)\lambda=f_1(\tilde{\xi},\lambda,t)+u(\tilde{\xi},t), \tag{1.61}$$

$$\dot{\lambda}=\frac{\partial H^T(\tilde{\xi},t)}{\partial\tilde{\xi}}K_w^{-1}\{z-H(\tilde{\xi},t)\}-\frac{\partial f^T(\tilde{\xi},t)}{\partial\tilde{\xi}}\lambda-\frac{\partial u^T(\tilde{\xi},t)}{\partial\tilde{\xi}}\lambda+$$

$$+2\lambda^T f_0(\tilde{\xi},t)K_n\frac{\partial f_0^T(\tilde{\xi},t)}{\partial\tilde{\xi}}\lambda=\psi(\tilde{\xi},\lambda,z,t)-\frac{\partial u^T(\tilde{\xi},t)}{\partial\tilde{\xi}}\lambda, \tag{1.62}$$

где f_1, ψ – соответствующие векторные функции, с начальными и конечными условиями (1.60).

Дальнейшее решение задачи синтеза дуального управления состоит в поиске управления u, обеспечивающего максимум критерия J_y (1.57) при описании вектора состояния динамической системы уравнениями (1.60) – (1.62).

Обозначив вектор $|\,\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_s\,|^T=\mathrm{A}$, где $\{\alpha_1(\tilde{\xi}),\alpha_2(\tilde{\xi}),\ldots,\alpha_s(\tilde{\xi})\}$ – система многомерных функций, представим, как и ранее, аппроксимацию вектора $u(\tilde{\xi},t)$ в виде

$$u(\tilde{\xi},t)=\left(E\otimes\mathrm{A}^T\right)u=\mathrm{A}_E\,u,$$

где $u=|\,u_{11} \quad \ldots \quad u_{1s} \quad u_{21} \quad \ldots \quad u_{2s} \quad \ldots \quad u_{n1} \quad \ldots \quad u_{ns}\,|^T$,

E – единичная матрица размерности $n{\times}n$, $u_i(\tilde{\xi},t)=\sum\limits_{j=1}^{s}u_{ij}(t)\alpha_j(\tilde{\xi})$ – i-й компонент $(i=\overline{1,n})$ вектора u, коэффициенты которого определяют конкретные технические характеристики управляющего органа.

Тогда выражения (1.61), (1.62) могут быть представлены в виде:

$$\dot{\tilde{\xi}}=f_1(\tilde{\xi},\lambda,t)+\mathrm{A}_E(\tilde{\xi})\,u(t), \tag{1.63}$$

$$\dot{\lambda} = \psi\left(\tilde{\xi}, \lambda, z, t\right) - \left\langle \frac{\partial\left[A_E\left(\tilde{\xi}, t\right)\right]}{\partial\tilde{\xi}} u(t) \right\rangle^T \lambda. \tag{1.64}$$

Очевидно, что специфика («двухточечность») данных уравнений в принципе не позволяет использовать существующие традиционные методы теории оптимального управления для управления объектом (1.63), (1.64). Для возможности решения подобной задачи введем далее вектор-функцию φ, такую, что

$$\tilde{\xi} = \varphi(\lambda, t).$$

В этом случае производная по времени вектора $\tilde{\xi}$ оценок состояния объекта, соответственно, будет иметь вид:

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dt} = \frac{\partial\varphi(\lambda, t)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(\lambda, t)}{\partial\lambda}\frac{d\lambda}{dt}.$$

Учитывая соотношения (1.63), (1.64), запишем уравнение вектор-функции φ, эквивалентное дифференциальным уравнениям сопряженной системы (1.63), (1.64), следующим образом:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = f_1 + \mathrm{A}_E\, u - \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\left(\psi - \left\langle \frac{\partial\, \mathrm{A}_E}{\partial\varphi}\, u \right\rangle^T \lambda\right), \qquad \varphi(\lambda, t_0) = \tilde{\xi}_0. \tag{1.65}$$

Анализ полученного уравнения показывает, что теперь решаемая задача сводится к поиску оптимального управления $u(t)$ объектом, описываемым векторным уравнением в частных производных (1.65) (при уже решенной задаче оптимального оценивания его вектора состояния), при следующей трансформации вида оптимизируемого функционала J_y (1.57):

$$J_y = \int_{t_0}^{t_k} Q[\varphi, u, t]\, dt.$$

Постановка и решение подобной задачи, когда управление отыскивается в классе вектор-функций, не зависящих от пространственных координат объекта $\varphi(t)$, описываемого квазилинейными дифференциальными уравнениями в частных производных со многими независимыми переменными, изложены в [163]. Запишем для рассмотренного случая гамильтониан [163]

$$H^* = -Q + \int\limits_{\lambda_*} \Lambda^T \left[f_1 + \mathrm{A}_E u - \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\left(\psi - \left\langle \frac{\partial \mathrm{A}_E}{\partial\varphi} u \right\rangle^T \lambda \right)\right] d\lambda ,$$

где $\Lambda = \Lambda(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda},\varphi,u,t)$ - вектор сопряженных переменных размерности N, определяемый на основе решения следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных [163], сопряженной к (1.65):

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = -\Lambda^T \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\Lambda^T \left\langle f_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\left(\psi - \left\langle \frac{\partial \mathrm{A}_E}{\partial\varphi} u \right\rangle^T \lambda \right)\right\rangle \right]. \tag{1.66}$$

Граничные условия при этом будут иметь вид [163]:

$$\varphi(t_0) = \tilde{\xi}_0, \qquad \Lambda(t_k) = 0.$$

Дальнейшее решение поставленной задачи осуществляется аналогично [163]. Так, в отсутствие ограничений на управление закон оптимального управления может быть найден из условия стационарности $\frac{\partial H^*}{\partial u} = 0$, т.е.

$$-\frac{\partial Q}{\partial u} + \int\limits_{\lambda_*} \left\{ \Lambda^T \mathrm{A}_E + \left[\Lambda^T \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} \frac{\partial \mathrm{A}_E}{\partial\varphi} \right] \hat{\otimes} (\lambda \otimes I_s) \right\} d\lambda = 0, \tag{1.67}$$

где I_s – единичная матрица размерности $s\times s$;

$\hat{\otimes}$ – символ блочного произведения матриц,

откуда непосредственно может быть получен закон оптимального управления $u_{\text{opt}} = \gamma(\Lambda, \varphi, \lambda, t)$. Очевидно, что вид закона u_{opt} определяется видом зависимости подынтегральной функции Q от управления u.

Резюмируя вышеизложенное, можно сделать вывод о том, что окончательное решение поставленной задачи в общем случае состоит в определении закона оптимального управления $u_{\text{opt}} = \gamma(\Lambda, \varphi, \lambda, t)$ из векторного уравнения, аналогичного уравнению (1.67), и последующего совместного решения системы сопряженных уравнений в частных производных (1.65), (1.66). Так как на сегодняшний день точного решения таких задач не существует, то на практике обычно используются различные процедуры отыскания приближенного решения [163], особенности применения которых для исследуемого случая рассмотрены ниже.

Проиллюстрируем возможность использования предложенного подхода к синтезу оптимального дуального управления на следующем примере.

Пример 6. Рассмотрим нелинейный объект

$$\dot{\xi} = \cos\xi + u + n\,,\ \ \xi(t_0) = 0\,, \tag{1.68}$$

наблюдаемый измерителем

$$z = \xi + w\,, \tag{1.69}$$

где ξ – состояние объекта;

u – управление объектом;

z – выходной сигнал наблюдателя;

w, n – белые гауссовские шумы с нулевыми средними и единичными дисперсиями.

Критерий оптимального управления (1.57) выберем в следующем виде:

$$\min_u \left\langle J_y = \int_{t_0}^{t_k} \left[\xi + u^2\right] dt \right\rangle. \tag{1.70}$$

Для решения задачи оптимального управления объектом (1.68), (1.69) предварительно найдем оценку $\tilde{\xi}$ его состояния ξ, оптимальную по критерию максимума апостериорной вероятности. Для этого введем в рассмотрение минимизируемый по $\tilde{\xi}$ функционал

$$J_н = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_k} \left[\left(z - \tilde{\xi}\right)^2 + n^2\right] dt \tag{1.71}$$

и запишем соответствующий гамильтониан

$$H_* = \frac{1}{2}\left(z - \tilde{\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}n^2 + \lambda\left(\cos\tilde{\xi} + u + n\right),$$

где λ – сопряженная переменная.

Система сопряженных уравнений, определяющая решение задачи оптимального по критерию оценивания (1.71) состояния объекта (1.68), (1.69), имеет в соответствии с [63] вид:

$$\dot{\tilde{\xi}} = \cos\tilde{\xi} - \lambda + u = f\left(\tilde{\xi}, \lambda, t\right) + u,$$

$$\dot{\lambda} = \left(z - \tilde{\xi}\right) + \lambda \sin\tilde{\xi} - \lambda \frac{\partial u}{\partial \tilde{\xi}} = \psi\left(\tilde{\xi}, \lambda, z, t\right) - \lambda \frac{\partial u}{\partial \tilde{\xi}}. \qquad (1.72)$$

В аппроксимации вектора $u\left(\tilde{\xi}, t\right)$ число членов разложения s выберем равным трем:

$$u(\tilde{\xi}, t) = \begin{vmatrix} \alpha_1(\tilde{\xi}) & \alpha_2(\tilde{\xi}) & \alpha_3(\tilde{\xi}) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{vmatrix} = \alpha^T u_t.$$

Для возможности последующего синтеза оптимального по критерию (1.70) управления введем далее функцию φ (1.66) и перейдем от сопряженных уравнений (1.72) объекта к уравнениям в частных производных вида (1.65):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \cos\varphi - \lambda + \alpha^T u_t - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\left[(z - \varphi) + \lambda \sin\varphi - \lambda \frac{\partial \alpha^T}{\partial \varphi} u_t \right]. \qquad (1.73)$$

В этом случае функционал J_y (1.70), оптимизируемый по u_t, будет иметь вид:

$$J_y = \int_{t_0}^{t_k} \left[\varphi + \left(\alpha^T u_t\right)^2 \right] dt,$$

а гамильтониан, соответственно, вид:

$$H^* = -\varphi - \left(\alpha^T u_t\right)^2 +$$

$$+ \int_{\lambda_*} \Lambda \left\langle \cos\varphi - \lambda + \alpha^T u_t - \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}\left[(z - \varphi) + \lambda \sin\varphi - \lambda \frac{\partial \alpha^T}{\partial \varphi} u_t \right] \right\rangle d\lambda.$$

Отсюда на основании выражения для определения оптимального управления (1.67) получаем легко разрешаемую относительно компонентов вектораu_{opt} линейную систему алгебраических уравнений

$$\left(\alpha^T u_{\text{опт}}\right)\alpha^T = \frac{1}{2}\int_{\lambda_*} \Lambda \left\{ \alpha^T + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \alpha^T}{\partial \varphi} \right\} d\lambda.$$

Сопряженная переменная $\Lambda(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda},\varphi,u,\ t)$ при этом может быть определена на основе решения дифференциального уравнения в частных производных, сопряженного к (1.73):

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial t}=\Lambda\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\left[\lambda\cos\varphi-\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2}u_t\,\lambda-1\right]. \qquad (1.74)$$

Граничные условия для системы уравнений (1.73), (1.74) имеют вид [163]:

$$\varphi(t_0)=0\,,\quad \frac{\partial\varphi(t_0)}{\partial\lambda}=0,\quad \Lambda(t_k)=0\,,\quad \lambda(t_k)=0\,.$$

Решение поставленной проблемы далее сводится к решению двухточечной краевой задачи для уравнений в частных производных (1.73), (1.74). В данном случае вполне обосновано использование приближенных методов решения, в качестве одного из которых рассмотрим далее следующий. Разложим функции φ и Λ в ряд по некоторой системе ортонормированных функций векторного аргумента:

$$\varphi(\lambda,t)=\sum_i^N a_i(t)\varphi_i(\lambda)=\varphi^T a\,;$$

$$\Lambda(\lambda,t)=\sum_i^N b_i(t)\varphi_i(\lambda)=\varphi^T b\,,$$

где N – число членов разложения, выбираемое из компромисса между необходимой точностью и объемом вычислительных затрат;

$\phi(\lambda)$ – вектор ортонормированных функций векторного аргумента λ;

a, b – векторы коэффициентов соответствующих разложений.

В этом случае решение сводится к решению двухточечной краевой задачи интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений [163]. С точки зрения практической реализации интегрирование такой системы оказывается значительно проще, чем интегрирование (1.73), (1.74) [163].

Дальнейшее решение краевой задачи было получено численно методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0.01с на интервале $t\in$ [0;100]с. Для приближенного представления функций φ и Λ использовалось разложение Фурье 3-го порядка. Моделировались задачи отдельно оптимального оценивания при заранее заданных законах управления (линейном, квадратичном и экспоненциальном) и дуальная задача оптимального оценивания и оптимального управления. Оценка точности оценивания состояния $\xi(t)$ объекта производилась по окончании временного интервала моделирования и практически была одинакова для всех случаев. Однако, при выборе оптимального закона управления значение функционала J_y было минимальным (составляло порядка 70% от остальных значений).

Это, в свою очередь, свидетельствует о том, что использование такого подхода позволяет получить не только принципиальное решение задачи синтеза оптимального управления динамическим объектом при условии одновременного обеспечения оптимального оценивания его вектора состояния, но и осуществить его эффективную практическую реализацию.

1.6. Многокритериальное оптимальное управление марковскими системами

В завершение краткого исследования проблемы синтеза стохастического управления динамическими системами рассмотрим такой ее интересный аспект как разработка управления, оптимального в смысле сразу нескольких критериев. Следует отметить, что проблема многокритериальной оптимизации динамических систем до настоящего времени не получила своего принципиального разрешения. Практически единственным подходом к формированию оптимального многокритериального управления был и остается синтез последнего на основе критерия, образованного суммой заданных критериев со своими весовыми коэффициентами [147]. Так как выбор данных коэффициентов является также проблемой, что приводит к достаточно слабому использованию такого подхода на практике, то поиск методов, обеспечивающих оптимизацию динамических систем по заданному конечному множеству критериев, остается одной из интересных и актуальных задач теории управления, решение которой представляет не только практический, но и существенный теоретический интерес. В связи с этим рассмотрим один из возможных путей решения этой задачи, ориентированный на оптимизацию стохастических систем общего вида, исследованных ранее:

$$\dot{\xi} = f(\xi, t) + U(\xi, t) + f_0(\xi, t)n, \tag{1.75}$$

гдеU – искомый вектор управления.

Поиск вектора U осуществляется из условия оптимизации (далее – минимизации) совокупности (вектора) критериев $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_i, \ldots, J_N\}$, где J_i – частные (локальные) критерии оптимизации. В наиболее общем случае критерии J_i, $i = \overline{1, N}$, зависят, в силу стохастического характера системы (1.75), не только от вектора состояния ξ, но и его плотности распределения ρ, описываемой в данном случае уравнением ФПК:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-div\left\{\left[f+U+\frac{1}{2}\frac{\partial f_0}{\partial\xi}\left(f_0^T\right)^{(V)}\right]\rho\right\}+ \\ +\frac{1}{2}div\left\{\overline{div}\left[f_0 f_0^T\rho\right]\right\}=-div\{U\rho\}+S[\rho]. \tag{1.76}$$

Формы минимизируемых вероятностных критериев J_i, в зависимости от особенностей системы (1.75) и характера решаемой задачи, могут быть самыми различными. Так, например, для обеспечения существования регулируемого процесса ξ в заданных пределах $\xi_*=[\xi_{min},\xi_{max}]$ первое условие оптимальности может быть сформулировано в виде требования минимума вероятности существования вектора состояния ξ вне интервала ξ_*: $J_1=1-\int\limits_{\xi_*}\rho\, d\xi=\int\limits_{-\infty}^{\xi_{min}}\rho\, d\xi+\int\limits_{\xi_{max}}^{\infty}\rho\, d\xi$; для обеспечения требуемого качества процесса (максимального приближения его вероятностных характеристик к заданным) второе условие может быть задано как требование минимума отклонения плотности распределения ρ процесса ξ от заданной g: $J_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\rho-g)^2\, d\xi$; $J_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\rho-g|\, d\xi$; $J_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho\ln\left(\frac{g}{\rho}\right)d\xi$ (критерий Кульбака) и т.д.; для улучшения информационных характеристик и структуры процесса ξ третье условие оптимальности целесообразно задавать как условие минимума его неопределенности (энтропии): $J_3=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho\ln\rho\, d\xi$ (критерий Шеннона), $J_3=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho\left[\frac{\partial\ln\rho}{\partial\xi}\right]\left[\frac{\partial\ln\rho}{\partial\xi}\right]^T d\xi$ (критерий Фишера) и т.д. Очевидно, что в обобщенной форме существующие вероятностные критерии J_i можно представить как

$$J_i=\int\limits_{\xi}\Phi_i[\xi,\rho(\xi,t)]d\xi,$$

где Φ_i – известная нелинейная функция векторного аргумента.

Таким образом, исходная совокупность критериев J в общем случае принимает вид:

$$J=\left\{\int\limits_{\xi}\Phi_1[\xi,\rho]d\xi,\int\limits_{\xi}\Phi_2[\xi,\rho]d\xi,\ldots,\int\limits_{\xi}\Phi_N[\xi,\rho]d\xi\right\}, \tag{1.77}$$

а поставленная выше задача многокритериальной оптимизации может быть сформулирована как задача синтеза вектора U, доставляющего минимум совокупности функционалов (1.77), существующих на множестве решений ρ уравнения (1.76).

Для возможности решения поставленной задачи представим вектор U в виде аддитивной смеси N векторов $U = \sum_{i=1}^{N} U_i$, подлежащих последующему определению.

Синтез совокупности векторов $\{U_1, U_2, \ldots, U_N\}$ осуществим далее в виде последовательной N-шаговой процедуры, состоящей в следующем. На 1-м шаге процедуры происходит формирование вектора U_1, доставляющего минимум функционалу J_1, при этом векторы $U_2(\xi, t), \ldots U_N(\xi, t)$ считаются относящимися к функциям правой части системы (1.75), независящим явно от управления U_1. По завершении синтеза оптимального вектора U_1, уже явно зависящего от векторов ξ, U_2,..., U_N, на 2-м шаге процедуры формируется вектор управления U_2 из условия минимума функционала J_2, при этом все остальные векторы U_i по-прежнему относятся к функциям, независящим от искомого на данном шаге управленияU_2. По формировании вектор-функции $U_2 = U_2(\xi, U_3, ..., U_N, t)$ на 3-м шаге осуществляется синтез управления U_3, обеспечивающего оптимум функционала J_3, и т.д. аналогично вышеизложенному.

Рассмотрим описанную процедуру далее более подробно.

При этом будем иметь в виду, что при синтезе реальных динамических систем помимо рассмотренных критериев, решающих задачу достижения заданных требований к динамике состояния системы, при формировании вектора управления вводят, как было отмечено ранее, критерий, минимизация которого обеспечивает минимум «энергетики» управления в произвольный текущий момент времени и который может быть записан в общем виде в следующей форме (для произвольного i-го шага предложенной процедуры оптимизации):

$$J_{U_i} = \int_{t_0}^{t} \int_{\xi} \Phi_{U_i} [U_i(\xi, t)] d\xi \, dt,$$

где Φ_{U_i} – известная нелинейная функция (выбираемая в подавляющем большинстве случаев квадратичной: $\Phi_{U_i} = U_i^T U_i$).

Тогда, в соответствии с изложенным, на 1-м шаге процедуры синтеза искомого управления вектор U_1 необходимо выбирать из условия минимума функционала

$$J_1 = \int_{\xi} \Phi_1[\xi, \rho] d\xi + \int_{t_0}^{t} \int_{\xi} \Phi_{U_1}[U_1] d\xi\, dt, \quad (1.78)$$

определенного на множестве решений следующего уравнения ФПК:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S[\rho] - div\left\{\left(U_1 + \sum_{i=2}^{N} U_i\right)\rho\right\} = S[\rho] - div\left(\rho \sum_{i=2}^{N} U_i\right) - div(U_1 \rho). \quad (1.79)$$

В силу положительной определенности рассмотренных выше вероятностных функционалов, а также «энергетической» составляющей Φ_{U_1} критерия J (1.78), для решения поставленной задачи далее будем использовать тот же факт, что и ранее – при неотрицательно определенной критериальной функции для обеспечения ее минимального значения в каждый момент времени достаточно, чтобы производная ее по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум [28]. В данном случае это приводит к следующему условию:

$$\max_{U_1}\left(-\dot{J}_1\right) = \max_{U_1}\left\{-\int_{\xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\dot{\rho} + \Phi_{U_1}[U_1]\right) d\xi\right\} =$$

$$= \max_{U_1}\left\{-\int_{\xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\left[S[\rho] - div\left(\rho \sum_{i=2}^{N} U_i\right) - \sum_{i}\frac{\partial U_{1_i}}{\partial \xi_i}\rho + U_{1_i}\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i}\right] + \Phi_{U_1}[U_1]\right) d\xi\right\},$$

где индекс iвведен для обозначения i-го компонента соответствующего вектора.

Анализ полученного выражения показывает, что решение поставленной задачи сводится к классической задаче отыскания вектор-функции U_1, реализующей минимум определенного интеграла

$$\int_{\xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\left\{S[\rho] - div\left(\rho \sum_{i=2}^{N} U_i\right) - \sum_{i}\frac{\partial U_{1_i}}{\partial \xi_i}\rho + U_{1_i}\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i}\right\} + \Phi_{U_1}[U_1]\right) d\xi.$$

При этом искомая вектор-функция U_1 должна удовлетворять системе уравнений Эйлера

$$-\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\rho\right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} - \frac{\partial}{\partial U_{1_i}}\Phi_{U_1}[U_1] = 0$$

или

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\right)\right]\rho + \frac{\partial}{\partial U_{1_i}}\Phi_{U_1}[U_1] = 0, \qquad i = \overline{1, N}.$$

В векторной форме данная система принимает вид:

$$\left(\frac{\partial \Phi_{U_1}}{\partial U_1}\right)^T = -\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho, \tag{1.80}$$

из которого следует, что в общем случае определение вектора U_1 требует решения нелинейного векторного уравнения. В частном случае квадратичной формы функции Φ_{U_1} решение уравнения (1.80) легко находится аналитически:

$$\left(2U_{1\text{опт}}^T\right)^T = -\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho,$$

т.е.

$$U_{1\text{опт}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho, \tag{1.81}$$

где функция ρ определяется из решения уже нелинейного уравнения, полученного после подстановки $U_{1\text{опт}}$ в уравнение ФПК:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S[\rho] + \frac{1}{2}div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho^2\right\} - div\left(\rho\sum_{i=2}^{N} U_i\right) = S_1[\rho] - div\left(\rho\sum_{i=2}^{N} U_i\right). \tag{1.82}$$

Уравнения (1.81), (1.82) завершают 1-й шаг (этап) синтеза искомого управления, после чего начинается процедура 2-го шага – поиск оптимального вектора U_2 из условия минимума критерия J_2

$$J_2 = \int_{\xi} \Phi_2[\xi, \rho] d\xi + \int_{t_0}^{t}\int_{\xi} \Phi_{U_2}[U_2] d\xi\, dt \ . \tag{1.83}$$

В силу совпадения структур уравнения (1.82)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S_1[\rho] - div\left(\rho\sum_{i=2}^{N} U_i\right) = S_1[\rho] - div\left(\rho\sum_{i=3}^{N} U_i\right) - div(\rho U_2)$$

и уравнения (1.79), а также критериев (1.78) и (1.83), очевидно, что вектор U_2 может быть сформирован с использованием подхода, совпадающего с приведенным. Т.о. задача 2-го этапа – задача синтеза оптимального управления $U_2(\xi,t)$, может быть сформулирована как задача поиска вектор-функции U_2, доставляющей минимум (1.83) на множестве функций $\rho(\xi,t)$, удовлетворяющих решению (1.82). Так как данная задача с точностью до обозначений совпадает с вышеприведенной, то и алгоритм ее решения оказывается тем же. Повторяя прежние вычисления, приходим к уравнению для оптимального управления $U_2(\xi,t)$, аналогичному (1.80):

$$\left(\frac{\partial \Phi_{U_2}}{\partial U_2}\right)^T = -\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho,$$

откуда для традиционного случая квадратичной формы Φ_{U_2} имеем:

$$U_{2\,\text{опт}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho. \qquad (1.84)$$

Очевидно, что в этом случае функция плотности ρ, определяющая уже выражения как для $U_{1\,\text{опт}}(\xi,t)$, так и для $U_{2\,\text{опт}}(\xi,t)$, является решением уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= S_1[\rho] + \frac{1}{2}div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho}\right)\right]^T \rho^2\right\} - div\left(\rho\sum_{i=3}^{N} U_i\right) = \\ &= S(\rho) + \frac{1}{2}div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\Phi_1 + \Phi_2)\right)\right]^T \rho^2\right\} - div\left(\rho\sum_{i=3}^{N} U_i\right).\end{aligned} \qquad (1.85)$$

Данное уравнение может быть по-прежнему записано в виде, совпадающим с (1.79)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S_2[\rho] - div\left(\rho\sum_{i=3}^{N} U_i\right) = S_2[\rho] - div\left(\rho\sum_{i=4}^{N} U_i\right) - div(U_3\rho),$$

что позволяет организовать процедуру синтеза вектора U_3, оптимального по критерию J_3, совпадающему по форме с критериями J_1, J_2, аналогично вышеизложенному. Более того, в силу очевидной инвариантности структуры уравнения ФПК к номеру i шага процедуры (и, соответственно, формируемого управления U_i), алгоритм синтеза остальных компонентов – векторов $U_4,...,U_N$, оказывается полностью совпадающим с рассмотренным выше. Это, в свою очередь, позволяет записать i-й вектор управления U_i, оптимальный по критерию J_i, аналогично (1.81), (1.84) как

$$U_{i\,\text{опт}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\rho}\right)\right]^T \rho,$$

и окончательно искомый вектор U в виде

$$U = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i\right)\right]^T \rho. \qquad (1.86)$$

Функция плотности распределения ρ, его определяющая, удовлетворяет в этом случае уже уравнению

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = S[\rho] + \frac{1}{2}div\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i\right)\right]^T \rho^2\right\}, \qquad (1.87)$$

интегрирование которого завершает процесс решения поставленной проблемы.

Важным преимуществом предложенного подхода оказывается еще тот факт, что при рассмотрении поставленной проблемы в более общем случае – случае синтеза *апостериорного* многокритериального управления U, решение задачи остается точно таким же. Действительно, при наблюдении вектора состояния ξ с помощью нелинейного измерителя

$$z = H(\xi, t) + W,$$

уравнение плотности распределения описывается уже уравнением Стратоновича, которое в принятых выше обозначениях может быть записано как:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -div\{U\rho\} + S[\rho] + [F - F_0]\rho,$$

где

$$F = F(\xi, t) = -\frac{1}{2}[Z - H(\xi, t)]^T D_W^{-1}[Z - H(\xi, t)],$$

$$F_0 = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, t)\rho(\xi, t)\,d\xi.$$

Так как функция $F(\xi,t)$ от U не зависит, то, обозначая $S[\rho]+[F-F_0]\rho=S_A[\rho]$, приходим к уравнению $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-div\{U\rho\}+S_A[\rho]$, правая часть которого относительно искомого вектора U имеет ту же структуру, что и в уравнении (1.76). Очевидно, что подобное совпадение обеспечивает алгоритм синтеза вектора U, полностью совпадающий с приведенным выше, – апостериорный оптимальный вектор управления описывается выражением (1.86), а апостериорная плотность ρ – уравнением (1.87), где вместо функции $S[\rho]$ используется функция $S_A[\rho]$. Но в данном апостериорном случае интересно отметить дополнительные особенности синтеза управления U, возникающие в ситуации, когда управление может быть сформировано только в функции вектора измерений Z (но не вектора состояния ξ). (При управлении, например, летательным аппаратом, когда регулирование движения возможно только на основании измерения переменных его состояния – углов ориентации, скорости полета и др. навигационных параметров).

В связи с этим возникает задача синтеза вектора управления U только в функции вектора Z при сохранении сделанных выше предположений о характере объекта и наблюдателя (менее общая постановка задачи по отношению к уже исследованной).

Очевидно, что в этом случае уравнение АПВ имеет вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=S_A[\rho]-div[U(z,t)\rho(\xi,t)]=S_A[\rho]-\frac{\partial\rho}{\partial\xi}U=S_A[\rho]-\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\sum_{i=1}^{N}U_i(z,t).$$

Следуя прежним рассуждениям, i-й минимизируемый критерий J_i в данной задаче сформируем уже как:

$$J_i=\int_{\xi}\Phi_i[\xi,\rho(\xi,t)]d\xi+\int_{t_0}^{t}\Phi_{U_i}[U_i]dt,$$

(так как согласно исходному предположению $U_i=U_i(Z,t)$), при этом условие минимума функционала J_i примет соответственно вид:

$$\max_{U_i}\left(-\dot{J}_i\right)=\max_{U_i}\left\{-\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_i}{\partial\rho}\dot{\rho}d\xi-\Phi_{U_i}(U_i)\right\}.$$

Из последнего вытекает уравнение относительно искомого $U_{i\,\text{опт}}(Z,t)$:

$$\frac{\partial \Phi_{U_i}[U_i]}{\partial U_i} = \int\limits_{\xi} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\xi,$$

откуда для квадратичной формы Φ_{U_i} имеем:

$$U_{i\text{опт}}(Z,t) = \frac{1}{2} \int\limits_{\xi} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^T d\xi.$$

При этом функция АПВ ρ окончательно определяется из нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S_A[\rho] - \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \int\limits_{\xi} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^T \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} d\xi,$$

при решении которого, по-прежнему, могут быть использованы соображения, приведенные выше.

Возможность практического использования рассмотренного метода может быть проиллюстрирована на следующем примере.

Пример 7. Управление U объектом, описываемым нелинейным стохастическим уравнением

$$\dot{\xi} = -\xi - 0{,}01\xi^2 + U + n,$$

гдеn – белый гауссовский нормированный шум,
и наблюдаемым с помощью измерителя

$$z = 1{,}5\xi^2 + W,$$

гдеW – белый гауссовский центрированный шум с интенсивностью D_W,
требуется синтезировать, во-первых, из условия минимума неопределенности (энтропии) апостериорного процесса ξ, а, во-вторых, из условия обеспечения минимального интегрального отклонения АПВ ρ от нормированной гауссовской плотности $N(0{,}1;\ \xi)$. В этом случае первый вероятностный критерий может быть записан как

$$J_1 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi,t) \ln \rho(\xi,t)\, d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} U_1^2(\xi,t)\, d\xi\, dt,$$

а второй, соответственно:

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\rho(\xi, t) - N(0{,}1;\xi)]^2 \, d\xi + \int_{t_0}^{t} \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(\xi, t) \, d\xi \, dt \, .$$

Функция апостериорной плотности распределения ρ в рассматриваемом случае описывается уравнением Стратоновича вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{2D_W} \left\{ 3Z \left(\xi^2 - \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \rho d\xi \right) + 2{,}25 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^4 \rho d\xi - \xi^4 \right) \right\} + \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \left(\xi + 0{,}01\xi^2 \right) +$$
$$+ \rho(1 + 0{,}02\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(U_1 + U_2 \right) \rho \right] = S_A(\rho) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(U_1 + U_2 \right) \rho \right].$$

Формируя согласно вышеприведенному условие оптимальности, на первом этапе имеем:

$$\max_{U_1} \left(-\dot{J}_1 \right) = \max_{U_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 + \ln \rho) \dot{\rho} - U_1^2 \right] d\xi \right\} =$$
$$= \max_{U_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[(1 + \ln \rho) \left[S_A(\rho) - \frac{\partial}{\partial \xi} (U_2 \rho) \right] - (1 + \ln \rho) \rho \frac{\partial U_1}{\partial \xi} - \right. \right.$$
$$\left. \left. - (1 + \ln \rho) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} U_1 - U_1^2 \right] d\xi \right\} =$$
$$= \max_{U_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(B_0(\rho, \xi) + B_1(\rho, \xi) \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + B_2(\rho, \xi) U_1 - U_1^2 \right) d\xi \right\}.$$

Уравнение Эйлера, исходное для построения искомого вектора U_1, имеет вид:

$$\frac{\partial B_1(\rho, \xi)}{\partial \xi} - B_2(\rho, \xi) + 2U_1 = 0 \, ,$$

откуда

$$U_1 = \frac{1}{2} \left(B_2 - \frac{\partial B_1}{\partial \xi} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \rho}{\partial \xi} \, .$$

Рассуждая аналогично вышеизложенному, определяем оптимальное управление U_2:

$$U_2 = \rho\left(\frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right).$$

Тогда уравнение АПВ ρ окончательно принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = S_A(\rho) - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\rho^2 + \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} - \frac{\partial N}{\partial \xi}\right)\rho^2\right].$$

Решение данного уравнения осуществлялось методом прямоугольных сеток на интервале $\xi \in [-30;\ 30]$ с шагом $\Delta\xi = 0{,}05$ при $D_W = 1{,}5$, $\rho(\xi,t_0) = N(0{,}1;0{,}3;\xi)$ для каждого $Z(t_i)$, полученного в результате численного моделирования уравнений объекта и наблюдателя на интервале $t\in [0{,}100]$ сек методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом $\Delta t = 0{,}05$ с. (Формирование управления происходило при этом в масштабе времени поступления измерительной информации, т.е. для каждого временного шага моделирования t_i). По окончании времени моделирования интегральное квадратичное отклонение АПВ $\rho(\xi)$ от требуемой $N(0{,}1;\xi)$ составило всего ~ 0,09, что позволяет сделать вывод о возможности эффективного использования предложенного метода для синтеза многокритериального стохастического управления нелинейными динамическими объектами.

Дальнейшее совершенствование данного метода возможно в направлении уменьшения вычислительных затрат на реализацию управления.

Это, прежде всего, может быть достигнуто за счет аппроксимации уравнения АПВ системой обыкновенных дифференциальных уравнений ее параметров Y, имеющей вид (1.42)

$$\dot{Y} = G_0 + GU_t,$$

где далее представляем вектор U_t в виде аддитивной смеси N векторов $U_t = \sum_{i=1}^{N} U_i(t)$, подлежащих последующему определению.

Тогда, в соответствии с изложенным, на 1-м шаге процедуры синтеза искомого управления вектор U_1 необходимо выбирать из условия минимума функционала

$$J_1 = \int_{\xi} \Phi_1[\xi, \tilde{\rho}(\xi, Y)]d\xi + \int_{t_0}^{t} \Phi_{U_1}[U_1]\,dt,$$

где $\tilde{\rho}(\xi, Y)$ – гауссовская аппроксимация АПВ.

Следуя прежним рассуждениям, приходим к следующему условию:

$$\max_{U_1}\left(-\dot{J}_1\right)=\max_{U_1}\left\{-\left(\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_1[\tilde{\rho}]}{\partial\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}(\xi,Y)}{\partial Y}\dot{Y}\,d\xi+\Phi_{U_1}[U_1]\right)\right\}.$$

Подставляя в это условие выражение для правой части уравнения (1.42) и учитывая представление $U_t=\sum_{i=1}^{N}U_i$, имеем следующее уравнение относительно U_1:

$$\frac{\partial}{\partial U_1}\left\{\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial Y}d\xi\left(G_0+G\sum_{i=2}^{N}U_i+GU_1\right)+\Phi_{U_1}[U_1]\right\}=0.$$

Из данного уравнения вытекает окончательное уравнение для определения оптимального вектора U_1:

$$-\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial Y}d\xi\, G=\frac{\partial\Phi_{U_1}}{\partial U_1}[U_1], \qquad (1.88)$$

решение которого осуществляется, исходя из конкретного вида функции Φ_{U1}.

Так, для традиционной квадратичной формы функции

$$\Phi_{U_1}(U_1)=U_1(t)^T U_1(t)$$

уравнение (1.88) принимает вид:

$$-\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial Y}d\xi\, G=2U_1^T,$$

откуда

$$U_{1_{\text{опт}}}=-\frac{1}{2}G^T\int_{\xi}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial Y}\right)^T d\xi. \qquad (1.89)$$

В выражении (1.89) текущие значения гауссовской функции $\tilde{\rho}$ формируются на основе решения уравнения (1.42) после подстановки в него выражения (1.89):

$$\dot{Y} = G_0 - \frac{1}{2} G \cdot G^T \int\limits_{\xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi + G \sum_{i=2}^{N} U_i \, . \tag{1.90}$$

Уравнения (1.89), (1.90) завершают 1-й шаг (этап) синтеза искомого управления, после чего начинается процедура 2-го шага – поиск оптимального вектора U_2 из условия минимума критерия J_2

$$J_2 = \int\limits_{\xi} \Phi_2 [\xi, \tilde{\rho}] d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} \Phi_{U_2} [U_2] dt \, . \tag{1.91}$$

В силу совпадения структур уравнения (1.90)

$$\dot{Y} = G_0 - \frac{1}{2} G\, G^T \int\limits_{\xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi + G \sum_{i=2}^{N} U_i =$$

$$= G_0 - \frac{1}{2} G\, G^T \int\limits_{\xi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi + G \sum_{i=3}^{N} U_i + GU_2 = G_{01} + GU_2 \, ,$$

и уравнения (1.42), а также критериев J_1 и J_2, очевидно, что вектор U_2 может быть сформирован с использованием подхода, совпадающего с приведенным. Таким образом, задача 2-го этапа – задача синтеза оптимального управления $U_2(t)$, может быть сформулирована как задача поиска вектор-функции U_2, доставляющей минимум (1.91) на множестве функций $\tilde{\rho}(\xi, Y)$, вектор параметров Y которой удовлетворяет решению (1.90). Так как данная задача с точностью до обозначений совпадает с вышеприведенной, то и алгоритм ее решения оказывается тем же. Повторяя прежние вычисления, приходим к уравнению для оптимального управления $U_2(t)$, аналогичному (1.88):

$$-\int\limits_{\xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} d\xi\, G = \frac{\partial \Phi_{U_2}}{\partial U_2} [U_2],$$

откуда для традиционного случая квадратичной формы Φ_{U_2} имеем:

$$U_{2\,\text{опт}} = -\frac{1}{2} G^T \int\limits_{\xi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi \, .$$

Очевидно, что в этом случае вектор параметров Y функции плотности $\tilde{\rho}$, определяющий уже выражения как для $U_{1\,\text{опт}}(t)$, так и для $U_{2\,\text{опт}}(t)$, является решением уравнения

$$\dot{Y} = G_0 - \frac{1}{2} G G^T \int_\xi \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi - \frac{1}{2} G G^T \int_\xi \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi + G \sum_{i=3}^{N} U_i =$$

$$= G_0 - \frac{1}{2} G G^T \int_\xi \frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi_1 + \Phi_2) \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi + G \sum_{i=3}^{N} U_i .$$

Данное уравнение может быть по-прежнему записано в виде, совпадающим с (1.42)

$$\dot{Y} = G_0 - \frac{1}{2} G G^T \int_\xi \frac{\partial}{\partial \rho} (\Phi_1 + \Phi_2) \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi + G \sum_{i=4}^{N} U_i + G U_3 =$$

$$= G_{02} + G U_3 ,$$

что позволяет организовать процедуру синтеза вектора U_3, оптимального по критерию J_3, совпадающему по форме с критериями J_1, J_2, аналогично вышеизложенному. Более того, в силу очевидной инвариантности структуры уравнения вектора параметров Y к номеру i шага процедуры (и, соответственно, формируемого управления U_i), алгоритм синтеза остальных компонентов– векторов $U_4,\ldots,U_N$, оказывается полностью совпадающим с рассмотренным выше. Это, в свою очередь, позволяет записать i-й вектор управления U_i, оптимальный по критерию J_i, как

$$U_{i\,\text{опт}} = -\frac{1}{2} G^T \int_\xi \frac{\partial \Phi_i}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi ,$$

и окончательно искомый вектор U в виде

$$U = -\frac{1}{2} G^T \int_\xi \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_i \right) \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi .$$

Вектор параметров Y функции плотности распределения $\tilde{\rho}$, его определяющий, удовлетворяет в этом случае уже уравнению

$$\dot{Y} = G_0 - \frac{1}{2} G G^T \int_{\xi} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_i \right) \left(\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial Y} \right)^T d\xi ,$$

интегрирование которого завершает процесс решения поставленной проблемы.

В заключение данной главы следует отметить, что идея синтеза стохастического управления на основе формирования управления плотностью марковского процесса не исчерпывается подходами, рассмотренными выше, а продолжает развиваться для новых перспективных областей теории стохастического управления.