

О напряженном состоянии на контурах подземных горизонтальных выработок, подверженных всестороннему равномерному давлению

УДК 624.131

Богомолова Оксана Александровна

Канд. техн. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет» (г. Волгоград);
e-mail: boazaritcyn@mail.ru

Ушаков Андрей Николаевич

Доцент, ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет» (г. Волгоград);
e-mail: ushakov.andrej2012@yandex.ru

Статья получена: 21.12.2018. Рассмотрена: 23.12.2018. Одобрена: 29.12.2018. Опубликовано онлайн: 26.03.2019. ©РИОР

Аннотация. В работе приведены результаты исследования по распределению напряжений на контурах подземных выработок, поперечное сечение которых имеет вид трапеции и эллипса. Получено распределение напряжений в точках контуров выработок при заданных значениях равномерного давления и коэффициента бокового распора горной породы. Приведены графические изображения эпюр напряжений, действующих на контурах рассматриваемых выработок.

Ключевые слова: отображающая функция, горизонтальная выработка, подземное хранилище углеводородов, напряженное состояние, равномерное давление, глубина заложения выработки.

Известно, что одной из наиболее важных задач геомеханики является задача, связанная с исследованием напряженного состояния горных пород вокруг одиночных выработок [1–5] в упругом изотропном массиве, причем особый интерес представляет исследование напряжен-

ного состояния в точках контуров выработок, результат которого непосредственно связан с проблемой их прочности.

Формы поперечных сечений выработок при решении двумерной задачи можно получить при помощи функций комплексного переменного, осуществляющих отображение одной из канонических областей (внутренность или внешность единичного круга либо верхняя или нижняя полуплоскость) на интересующую область. Хорошо известно [6–9], что построение таких функций представляет собой довольно трудную задачу, поскольку отображения, осуществляемые такими функциями, должны быть не только конформными, но и представлять собой достаточно простые и удобные выражения из хорошо изученных функций. Наиболее подходящим классом функций, удовлетворяющим этим требованиям, являются полиномы.

В данной статье в рамках модели линейно-деформируемой среды рассмотрена задача изучения напряженного состояния в точках контуров подземных горных выработок на при-

ABOUT THE STRESS STATE ON THE CONTOURS OF UNDERGROUND HORIZONTAL WORKINGS, SUBJECT TO AN OVERALL UNIFORM PRESSURE

Oksana Bogomolova

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Volgograd State Technical University, Volgograd; e-mail: boazaritcyn@mail.ru

Andrey Ushakov

Associate Professor, Volgograd State Technical University, Volgograd; e-mail: ushakov.andrej2012@yandex.ru

Manuscript received: 21.12.2018. **Revised:** 23.12.2018. **Accepted:** 29.12.2018. **Published online:** 26.03.2019. ©RIOR

Abstract. The paper presents the results of a study on the distribution of stresses on the contours of underground workings, the cross section of which has the form of a trapezoid and an ellipse. The distribution of stresses at the points of workings contours is obtained at the given values of uniform pressure and the lateral expansion coefficient of the rock. The graphic images of stress diagrams acting on the contours of the considered workings are given.

Keywords: displaying function, horizontal production, underground storage of hydrocarbons, stress state, uniform pressure, depth of production.

мере выработок трапециевидной и эллиптической форм сечений заданных размеров при условии действия на их контуры всесторонне-го равномерного давления.

В качестве отображающей функции используется функция комплексного переменного, предложенная В.К. Цветковым [10], при помощи которой им был решен ряд актуальных задач механики горных пород [11], имеющих важное прикладное значение.

Отметим, что отображающая функция В.К. Цветкова была применена и детально исследована в работах [12; 13] с связи с задачей об определении допустимой глубины заложения подземной горизонтальной выработки.

Будем предполагать, что подземная выработка расположена на достаточно большой глубине H , причем в точках контура выработки действует всестороннее равномерное давление величины p . Это дает возможность рассматривать горную выработку как подземное хранилище углеводородов, а соответствующую задачу сформулировать как задачу об определении напряжений на контуре подземного хранилища заданной формы сечения.

Рассмотрим бесконечную односвязную область, границей которой является семейство простых замкнутых кривых. Следуя [10; 11], функцию комплексного переменного, отображающую эту область на внутренность единичного круга, примем в виде

$$z = \omega(\zeta) = i(A\zeta^{-1} + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3), \quad (1)$$

где A, B, C, D — действительные числа.

Полагая в выражении (1) $\zeta = e^{i\theta}$ и отделяя действительные и мнимые части, получим уравнения контуров отверстий в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (A - B)\sin\theta - C\sin 2\theta - D\sin 3\theta, \\ y(\theta) &= (A + B)\cos\theta + C\cos 2\theta + D\cos 3\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $0 < \theta \leq 2\pi$.

Рассмотрим подземную выработку неограниченной длины и формы сечения, определяемой при помощи отображающей функции (1) и задаваемой параметрическим уравнением (2). Пусть контур этой выработки подвержен равномерному всестороннему давлению величины p .

Тогда напряженное состояние в горном массиве, ослабленном выработкой, имеет вид

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = p,$$

где p — постоянная величина. Следуя [1], будем полагать, что при положительных значениях контур выработки испытывает сжатие постоянной величины p , а при отрицательных — растяжение той же интенсивности.

Формула, описывающая напряженное состояние на контуре выработки сечения, форма которого определяется при помощи отображающей функции (1) при условии равномерного давления заданной величины p в точках контура, имеет вид [14]

$$\sigma_\theta = -\frac{\gamma H(F + G\cos\theta + Q\cos 2\theta) - p(K - 4U + (L - 4V)\cos\theta + (M - 4W)\cos 2\theta - N\cos 3\theta - R\cos 4\theta)}{K + L\cos\theta + M\cos 2\theta + N\cos 3\theta + R\cos 4\theta}, \quad (3)$$

$$\text{где} \quad F = (1 + \mu)(9D^2 + 4C^2 - A^2) + BS; \quad (4)$$

$$Q = (1 + \mu)(A + 3D)B + (3D - A)S;$$

$$G = 2C((1 + \mu)(B + 6D) + S);$$

$$S = \frac{(1 + \mu)(A + D)B - 2(1 - \mu)A^2}{A - D};$$

$$U = \frac{AB^2}{A - D} + 4C^2 + 9D^2; \quad (5)$$

$$V = \frac{2C}{A - D}[AB + (A - D)(B + 6D)];$$

$$W = \frac{B}{A - D}[6AD - A^2 - 3D^2];$$

$$K = A^2 + B^2 + 4C^2 + 9D^2, \quad L = 4C(B + 3D),$$

$$M = 2B(3D - A), \quad N = -4AC, \quad R = -6AD, \quad (6)$$

где γ — объемный вес пород; μ — коэффициент бокового распора; H — глубина заложения выработки, p — величина равномерного давления, приложенного к контуру отверстия.

Формула (3) получена в предположении, что глубина заложения выработки H достаточно большая [12]. Следуя [1], будем полагать, что

$$H \geq 50R_{\max}, \quad (7)$$

где R_{\max} — наибольший линейный размер сечения выработки.

В работе [10] была приведена формула тангенциального нормального напряжения, использованная автором для определения при заданных напряжениях на контурах выработок, возникающих от действия собственного веса пород, форм поперечных сечений подземных и открытых выработок, построенных при помощи отображающей функции (1), в зависимости от коэффициента бокового распора ненарушенного однородного, линейно деформируемого горного массива. Вывод этой формулы приведен в монографии [12], а в статье [13] она была использована для решения задачи о глубине заложения подземной горизонтальной выработки.

С учетом результатов работ [14; 15] заметим, что нахождение нулей тангенциального нормального напряжения (3) сводится к решению уравнения

$$8Rpt^4 + 4Npt^3 + 2(Q\gamma H + (4W - M - 4R)p)t^2 + (G\gamma HL + (4V - L - 3N)p)t + (F - Q)\gamma H + (M - 4W + R - K + 4U)p = 0, \quad (8)$$

где $t = \cos\theta$, $|t| \leq 1$,

а экстремальные значения функции $\sigma_\theta = \sigma(\theta)$ могут быть получены из уравнений:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 0, \\ 32a_1 \cos^5 \theta + 16a_2 \cos^4 \theta + 8(a_3 - 4a_1) \cos^3 \theta + \\ &+ 4(a_4 - 3a_2) \cos^2 \theta + 2(3a_1 - 2a_3 + a_5) \cos \theta + \\ &+ (a_2 - a_4 + a_6) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -RQ\gamma H + (2RM - 4RW)p, \\ a_2 &= -(3/2GR + 1/2NQ)\gamma H + \\ &+ (3RL - 6RV + MN - 2NW)p, \\ a_3 &= -(GN + 4FR)\gamma H + \\ &+ (8RK + 2NL - 4VN - 16RU)p, \\ a_4 &= (1/2QL - 1/2MG - 5/2GR - 3FN)\gamma H + \\ &+ (5RL + 2WL + 6NK - 10RV - 2VM - 12NU)p, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} a_5 &= (2QK - 2MF - 2GN - 3RQ)\gamma H + \\ &+ (6MR + 4LN + 8WK - 12RW - 8VN - 8MU)p, \\ a_6 &= (GK + 3/2QL - 5/2NQ - 3/2MG - FL)\gamma H + \\ &+ (5MN + 6WL + 4VK - 10NW - 6VM - 4LU)p. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь, используя приведенные выше формулы, рассмотрим задачу о распределении напряжений на контурах заданных размеров и форм сечений (на примерах выработок трапециевидной и эллиптической форм), имитирующих подземные горизонтальные выработки соответствующих форм сечений.

Задача. Построить подземную горизонтальную выработку заданных размеров и формы сечения, исследовать напряженное состояние на границе построенной выработки в зависимости от величины численного значения давления, действующего по этой границе, при условии, что величина коэффициента бокового распора задана заранее.

Будем рассматривать подземную горизонтальную выработку, поперечное сечение которой имеет форму равнобокой трапеции шириной 5 м и высотой 4 м. Для вычисления коэффициентов отображающей функции (1) воспользуемся методикой, приведенной в работе [13]. Используя принятые в ней обозначения, положим: $h = 4$ м, $\delta = 1,73$ м, $|p| = 2,5$ м, $|q| = 1$ м. Тогда, проведенные вычисления дают следующие значения коэффициентов:

$$A = 2,44, B = -0,24, C = 0 < 17, D = -0,2. \quad (11)$$

Полученная выработка заданных размеров и формы сечения изображена на рис. 1.

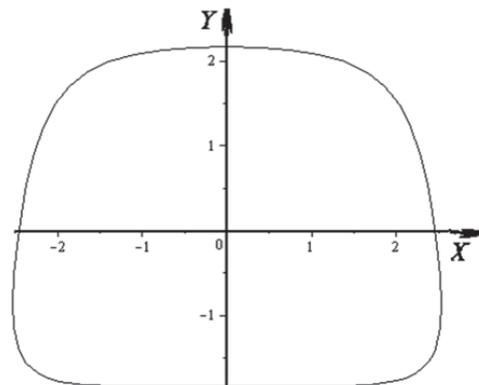


Рис. 1. Выработка трапециевидной формы сечения

Рассмотрим в качестве вмещающей породы гранит с объемным весом $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$ и пределами прочности при растяжении $R_{\text{рас}} = -17 \text{ МПа}$ и сжатии $R_{\text{сж}} = 200 \text{ МПа}$. Поскольку наибольший линейный размер трапециевидной выработки — ее ширина, равная 5 м, то с учетом (7) положим $H = 250 \text{ м}$. Тогда $\gamma H = 625 000 \text{ кг/м}^2$.

При решении задачи используем два значения величины коэффициента бокового распора: $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_2 = 1$. Первое из них соответствует величине коэффициента Пуассона, которая в среднем для горных пород равна $\nu = 0,20$. Второе соответствует величине коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ и предполагает гидростатическое распределение напряжений в горном массиве, которое принимается при определении напряжений на достаточно больших глубинах [1].

1. Выработка трапециевидной формы сечения.

Рассмотрим подземную выработку трапециевидной формы сечения с коэффициентами (11) отображающей функции (1).

Заметим, что коэффициенты (5) не зависят от коэффициента бокового распора и для обоих случаев принимают значения:

$$\begin{aligned} U &= 0,529, V = -0,565, W = 0,818; \\ K &= 6,487, L = -0,571, M = 1,459; \\ N &= -1,659, R = 2,928. \end{aligned} \quad (12)$$

Случай $\mu_1 = 0,25$.

На основании формул (4) получаем

$$F_1 = -5,974; G_1 = -1,848; Q_1 = 10,505. \quad (13)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} &23,424 p \cos^4 \theta - 6,636 p \cos^3 \theta + \\ &+ (21,011 \gamma H - 19,795 p) \cos^2 \theta + \\ &+ (-1,848 \gamma H + 5,886 p) \cos \theta - \\ &- 16,479 \gamma H - 3,257 p = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Для нахождения нулей необходимо задать значения давления p . Из постановки задачи следует, что необходимо выбирать значения $p < 0$.

В качестве значений давлений, приложенных к контуру выработки, примем:

$$p_0 = 0 \text{ МПа}, p_1 = -0,1 \text{ МПа}, p_2 = -0,5 \text{ МПа}, \\ p_3 = -1 \text{ МПа}, p_4 = -1,5 \text{ МПа}, p_5 = -2 \text{ МПа}. \quad (15)$$

Прямые вычисления по формуле (14) с учетом (15) дают следующие значения нулей:

$$\begin{aligned} \text{при } p_0 &= 0 \text{ МПа} & \theta_1 &= 0,347, \theta_2 = 2,573; \\ \text{при } p_1 &= -0,1 \text{ МПа} & \theta_1 &= 0,437, \theta_2 = 2,534; \\ \text{при } p_2 &= -0,5 \text{ МПа} & \theta_1 &= 0,712, \theta_2 = 2,289; \\ \text{при } p_3 &= -1 \text{ МПа} & \theta_1 &= 0,957, \theta_2 = 2,034; \\ \text{при } p_4 &= -1,5 \text{ МПа} & \theta_1 &= 1,103, \theta_2 = 1,887; \\ \text{при } p_5 &= -2 \text{ МПа} & \theta_1 &= 1,206, \theta_2 = 1,784, \\ & & \theta_3 &= 2,885. \end{aligned}$$

Перейдем к вычислению экстремальных значений тангенциальных нормальных напряжений.

По формулам (9) и (10) с учетом (12), (13), получим

$$\text{при } p_0 = 0 \text{ МПа} \text{ имеем } \theta_1 = 1,030, \theta_2 = 1,402, \\ \theta_3 = 2,126.$$

Присоединяя к полученным значениям $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= 1340785,959, \quad \sigma(\theta_4) = -19399,294, \\ \sigma(\theta_2) &= 1249012,481, \quad \sigma(\theta_5) = -304248,702. \\ \sigma(\theta_3) &= 2224459,696, \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(\theta_5) &= -304248,702, \\ \sigma_{\max}(\theta_3) &= 2224459,696. \end{aligned} \quad (16)$$

При $p_1 = -0,1 \text{ МПа}$ имеем $\theta_1 = 1,096$, $\theta_2 = 1,375$, $\theta_3 = 2,211$.

Полагая $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= 1240246,913, \quad \sigma(\theta_4) = -228444,585, \\ \sigma(\theta_2) &= 1207839,434, \quad \sigma(\theta_5) = -275875,686. \\ \sigma(\theta_3) &= 1948114,185, \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(\theta_5) &= -275875,686, \\ \sigma_{\max}(\theta_3) &= 1948114,185. \end{aligned} \quad (17)$$

При $p_2 = -0,5 \text{ МПа}$ имеем $\theta_1 = 0,344$, $\theta_2 = 1,868$, $\theta_3 = 2,491$.

Присоединяя $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= -393613,815, \quad \sigma(\theta_4) = -366251,156, \\ \sigma(\theta_2) &= 1152500,673, \quad \sigma(\theta_5) = -162383,623. \\ \sigma(\theta_3) &= -421582,209, \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_3) &= -421582,209, \\ \sigma_{\max}(\theta_2) &= 1152500,673.\end{aligned}\quad (18)$$

При $p_3 = -1$ МПа имеем $\theta_1 = 0,587$, $\theta_2 = 1,552$, $\theta_3 = 2,320$.

Полагая $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= -963313,519, & \sigma(\theta_4) &= -538509,370, \\ \sigma(\theta_2) &= 885910,359, & \sigma(\theta_5) &= -20518,544. \\ \sigma(\theta_3) &= -1597296,656,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_3) &= -1597296,656, \\ \sigma_{\max}(\theta_2) &= 885910,359.\end{aligned}\quad (19)$$

При $p_4 = -1,5$ МПа имеем $\theta_1 = 0,654$, $\theta_2 = 1,518$, $\theta_3 = 2,281$.

Полагая $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= -1721020,086, & \sigma(\theta_4) &= -710767,584, \\ \sigma(\theta_2) &= 690739,712, & \sigma(\theta_5) &= 121346,535. \\ \sigma(\theta_3) &= -3137820,981,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_3) &= -3137820,981, \\ \sigma_{\max}(\theta_2) &= 690739,712.\end{aligned}\quad (20)$$

И, наконец, при $p_5 = -2$ МПа имеем $\theta_1 = 0,684$, $\theta_2 = 1,506$, $\theta_3 = 2,265$.

Дополняя значения аргумента значениями $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= -2529250,257, & \sigma(\theta_4) &= -883025,798, \\ \sigma(\theta_2) &= 498426,47, & \sigma(\theta_5) &= 263211,615. \\ \sigma(\theta_3) &= -4745115,044,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_3) &= -4745115,044, \\ \sigma_{\max}(\theta_2) &= 498426,47.\end{aligned}\quad (21)$$

Проведенные вычисления позволяют выделить участки, на которых при заданных значениях равномерного давления действуют растягивающие напряжения, т.е.

при $p_0 = 0$ МПа имеем

$$\theta \in (0, 0.374) \cup (2.573, 3.710) \cup (5.944, 2\pi);$$

при $p_1 = -0,1$ МПа имеем

$$\theta \in (0, 0.437) \cup (2.534, 3.749) \cup (5.846, 2\pi);$$

при $p_2 = -0,5$ МПа имеем

$$\theta \in (0, 0.712) \cup (2.289, 4.029) \cup (5.571, 2\pi);$$

при $p_3 = -1$ МПа имеем

$$\theta \in (0, 0.957) \cup (2.034, 4.284) \cup (5.361, 2\pi);$$

при $p_4 = -1,5$ МПа имеем

$$\begin{aligned}\theta \in & (0, 1.103) \cup (1.887, 2.935) \\ & \cup (3.383, 4.396) \cup (5.180, 2\pi);\end{aligned}$$

при $p_5 = -2$ МПа имеем

$$\begin{aligned}\theta \in & (0, 1.206) \cup (1.784, 2.885) \cup \\ & \cup (3.398, 4.499) \cup (5.077, 2\pi).\end{aligned}$$

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для данной выработки трапециевидной формы сечения при заданных значениях равномерного давления $p_0 - p_5$ в случае $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 2.

Заметим, что при интенсивности давления, превышающем значение $|p| \approx 3,3$ МПа, участки, на которых действуют растягивающие напряжения, занимают практически весь интервал $(0, 2\pi)$, за исключением некоторой окрестности, центром которой является значение $\theta = \pi$. При этом имеем $\sigma_{\max}(\theta) = \sigma(\pi) > 0$, и значение сжимающего напряжения возрастает при увеличении интенсивности значения давления p .

Опираясь на результаты работы [12] и значения (16)–(21), исследуем прочность рассматриваемой выработки при данных значениях (15) давления. Для этого необходимо выполнение следующих неравенств

$$|\sigma_{\min}(\theta)| < R_{\text{рас}}/g, \quad |\sigma_{\max}(\theta)| < R_{\text{сж}}/g. \quad (22)$$

Проверка показывает, что при $p_0 = 0$ МПа, $p_1 = -0,1$ МПа, $p_2 = -0,5$ МПа, $p_3 = -1$ МПа оба неравенства (22) выполняются; при $p_4 = -1,5$ МПа и $p_5 = -2$ МПа выполняется лишь второе из неравенств (22). Таким образом, при значении

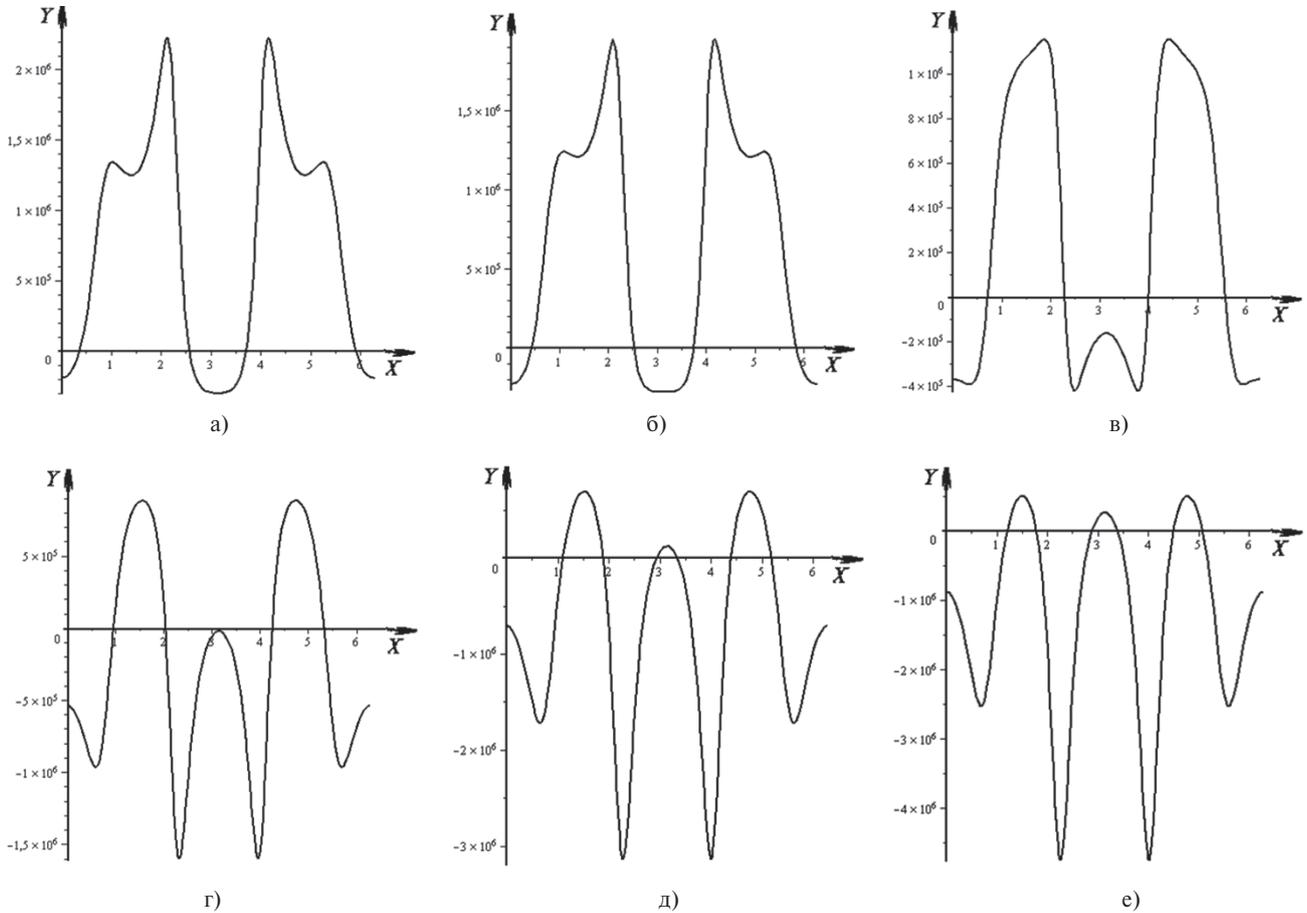


Рис. 2. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде трапеции при: а) $p_0 = 0$ МПа; б) $p_1 = -0,1$ МПа; в) $p_2 = -0,5$ МПа; г) $p_3 = -1$ МПа; д) $p_4 = -1,5$ МПа; е) $p_5 = -2$ МПа и $\mu_1 = 0,25$

давлений $p_0 - p_3$ рассматриваемая выработка трапециевидной формы сечения является прочной, а при остальных двух значениях величины давления выработка теряет прочность, поскольку растягивающее напряжение, прикладываемое к точкам контура выработки, превышает предельно допустимое значение.

Случай $\mu_2 = 1$.

Формулы (4) дают

$$F_2 = -10,858; G_2 = -1,117; Q_2 = 0.355. \quad (23)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$23,424p \cos^4 \theta - 6,636p \cos^3 \theta + (0,710\gamma H - 19,795p) \cos^2 \theta + (-1,117\gamma H + 3,288p) \cos \theta - 11,213\gamma H - 3,256p = 0. \quad (24)$$

Прямые вычисления по формуле (24) с учетом (15) дают следующие значения нулей:

при $p_0 = 0$ МПа нулей нет;

при $p_1 = -0,1$ МПа нулей нет;

при $p_2 = -0,5$ МПа нулей нет;

при $p_3 = -1$ МПа

$$\theta_1 = 0,703, \theta_2 = 0,812, \theta_3 = 1,977, \theta_4 = 2,454;$$

при $p_4 = -1,5$ МПа

$$\theta_1 = 0,344, \theta_2 = 1,734, \theta_3 = 1,767, \theta_4 = 2,586;$$

при $p_5 = -2$ МПа

$$\theta_1 = 0,192, \theta_2 = 1,337, \theta_3 = 1,624, \theta_4 = 2,641.$$

Вычислим, как и в предыдущем случае, экстремальные значения тангенциальных нормальных напряжений.

По формулам (9) и (10) с учетом (12), (23), получим

при $p_0 = 0$ МПа имеем $\theta_1 = 0,758$, $\theta_2 = 1,483$, $\theta_3 = 2,231$.

Присоединяя к полученным значениям $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= 1687546,201, & \sigma(\theta_4) &= 840250,463, \\ \sigma(\theta_2) &= 863562,602, & \sigma(\theta_5) &= 447716,346. \\ \sigma(\theta_3) &= 2688210,805,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_5) &= 447716,346, \\ \sigma_{\max}(\theta_3) &= 2688210,805.\end{aligned}\quad (25)$$

При $p_1 = -0,1$ МПа имеем $\theta_1 = 0,758$, $\theta_2 = 1,483$, $\theta_3 = 2,231$.

Полагая $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= 1517521,968, & \sigma(\theta_4) &= 805798,820, \\ \sigma(\theta_2) &= 825391,516, & \sigma(\theta_5) &= 476089,362. \\ \sigma(\theta_3) &= 2358122,736,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_5) &= 476089,362, \\ \sigma_{\max}(\theta_3) &= 2358122,736.\end{aligned}\quad (26)$$

При $p_2 = -0,5$ МПа имеем $\theta_1 = 0,756$, $\theta_2 = 1,484$, $\theta_3 = 2,232$.

Присоединяя $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= 837424,953, & \sigma(\theta_4) &= 667992,249, \\ \sigma(\theta_2) &= 672707,398, & \sigma(\theta_5) &= 589581,426. \\ \sigma(\theta_3) &= 1037766,222,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_5) &= 589581,426, \\ \sigma_{\max}(\theta_3) &= 1037766,222.\end{aligned}\quad (27)$$

При $p_3 = -1$ МПа имеем $\theta_1 = 0,757$, $\theta_2 = 1,483$, $\theta_3 = 2,223$.

Полагая $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= -12695,975, & \sigma(\theta_4) &= 495734,349, \\ \sigma(\theta_2) &= 481851,391, & \sigma(\theta_5) &= 731446,505. \\ \sigma(\theta_3) &= -612663,329,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_3) &= -612663,329, \\ \sigma_{\max}(\theta_5) &= 731446,505.\end{aligned}\quad (28)$$

При $p_4 = -1,5$ МПа имеем $\theta_1 = 0,757$, $\theta_2 = 1,483$, $\theta_3 = 2,231$.

Полагая $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= -862817,134, & \sigma(\theta_4) &= 323475,821, \\ \sigma(\theta_2) &= 290995,961, & \sigma(\theta_5) &= 873311,584. \\ \sigma(\theta_3) &= -2263103,679,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_3) &= -2263103,679, \\ \sigma_{\max}(\theta_5) &= 873311,584.\end{aligned}\quad (29)$$

И, наконец, при $p_5 = -2$ МПа имеем $\theta_1 = 0,757$, $\theta_2 = 1,483$, $\theta_3 = 2,231$.

Дополняя значения аргумента значениями $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= -1712938,268, & \sigma(\theta_4) &= 151217,607, \\ \sigma(\theta_2) &= 100140,480, & \sigma(\theta_5) &= 1015176,664. \\ \sigma(\theta_3) &= -3913543,029,\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_{\min}(\theta_3) &= -3913543,029, \\ \sigma_{\max}(\theta_2) &= 1015176,664.\end{aligned}\quad (30)$$

Растягивающие напряжения действуют на следующих участках контура:

при $p_3 = -1$ МПа имеем

$$\theta \in (0.703, 0.812) \cup (1.976, 2.454) \cup$$

$$\cup (3.829, 4.307) \cup (5.471, 5.580);$$

при $p_4 = -1,5$ МПа имеем

$$\theta \in (0.344, 1.173) \cup (1.767, 2.586) \cup$$

$$\cup (3.697, 4.516) \cup (5.110, 5.939);$$

при $p_5 = -2$ МПа имеем

$$\theta \in (0.192, 1.337) \cup (1.624, 2.641) \cup$$

$$\cup (3.642, 4.650) \cup (4.946, 6.091).$$

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$, а также при первых трех значениях давления

во всех точках контура действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки рассматриваемой трапецевидной формы сечения при заданных значениях равномерного давления $p_0 - p_5$ в случае $\mu_2 = 1$ приведены на рис. 3.

Заметим, что при интенсивности давления, превышающем значение $|p| \approx 2,26$ МПа, участки, на которых действуют растягивающие напряжения, занимают практически весь интервал $(0, 2\pi)$, за исключением некоторой окрестности, центром которой является значение $\theta = \pi$. При этом имеем $\sigma_{\max}(\theta) = \sigma(\pi) > 0$, и значение сжимающего напряжения возрастает при увеличении интенсивности значения давления p .

Для определения прочности выработки воспользуемся неравенствами (22). Проверка вы-

полнения этих неравенств с учетом значений (25)–(30) показывает, что при $p_4 = -1,5$ МПа и $p_4 = -1,5$ МПа не выполняется первое из неравенств (22). Это означает, что при значениях давлений $p_0 - p_3$ рассматриваемая выработка трапецевидной формы сечения является прочной, а при значениях p_4 и p_5 выработка теряет прочность ввиду того, что растягивающее напряжение, прикладываемое к точкам контура выработки превышает предельно допустимое значение.

2. Выработка эллиптического сечения. Рассмотрим выработку эллиптической формы сечения с коэффициентами отображающей функции (1), равными

$$A = 2,25, B = -0,25, C = D = 0, \quad (31)$$

изображенную на рис. 4.

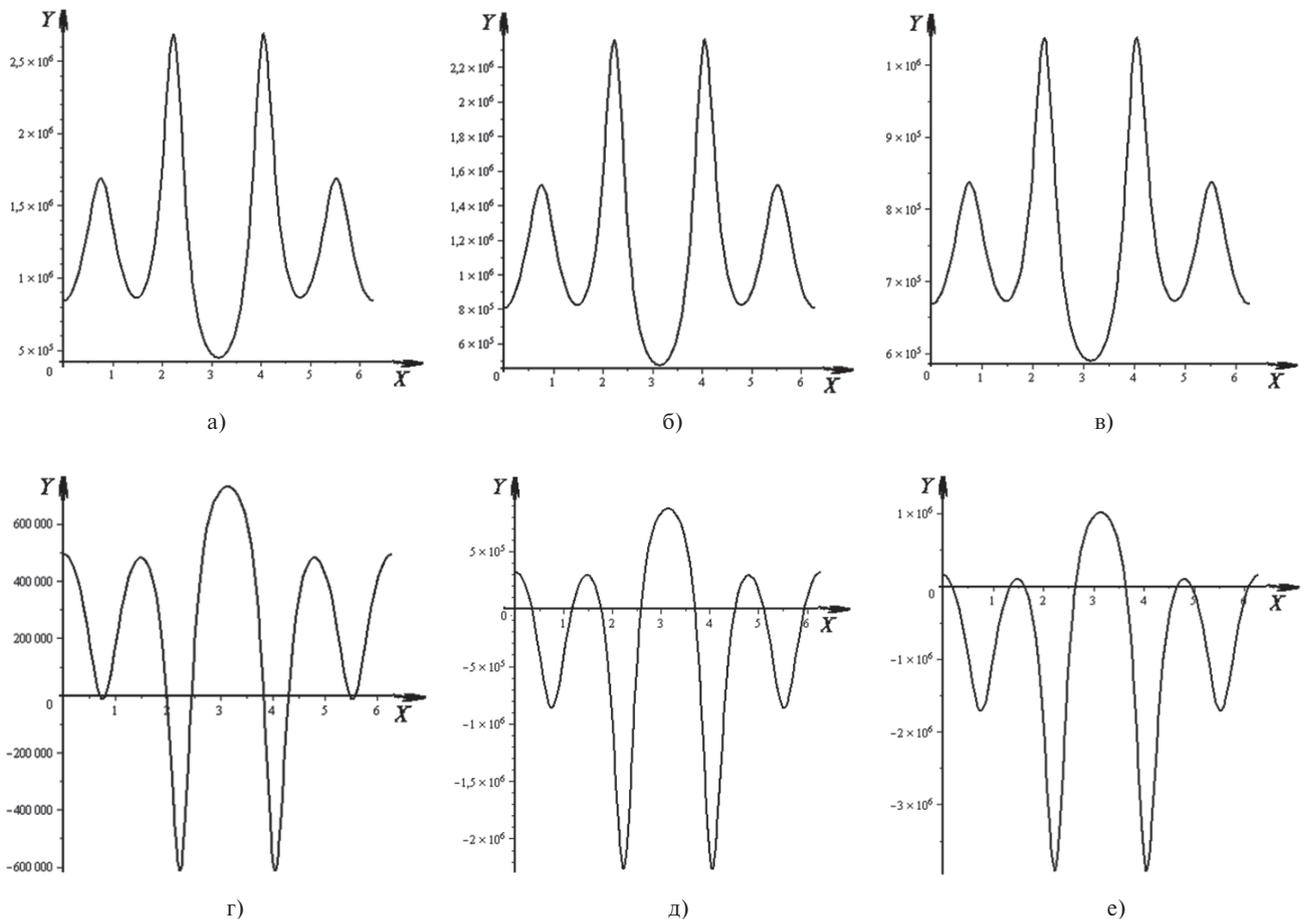


Рис. 3. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде трапеции при: а) $p_0 = 0$ МПа; б) $p_1 = -0,1$ МПа; в) $p_2 = -0,5$ МПа; г) $p_3 = -1$ МПа; д) $p_4 = -1,5$ МПа; е) $p_5 = -2$ МПа и $\mu_2 = 1$

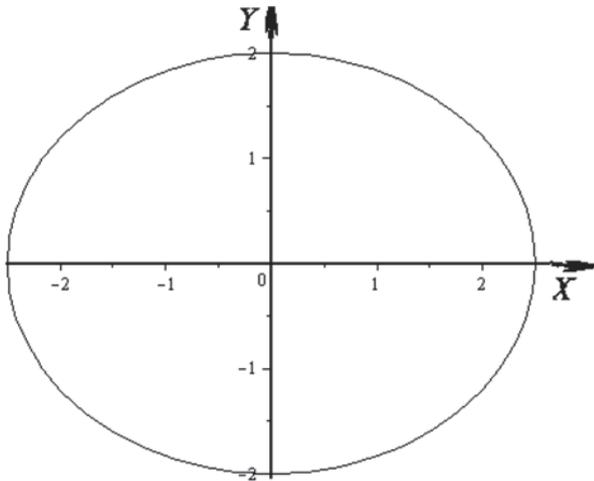


Рис. 4. Выработка эллиптической формы сечения

Тогда, согласно (5), имеем
 $U = 0,0625$, $V = 0$, $W = 0,5625$, $K = 5,125$;
 $L = 0$; $M = 1,125$; $N = R = 0$. (32)

Случай $\mu_1 = 0,25$.

На основании формул (4) получаем

$$F_1 = -5,406; G_1 = 0; Q_1 = 7,594. \quad (33)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$(15,188\gamma H + 2,25p)\cos^2\theta - 13\gamma H - 6p = 0. \quad (34)$$

Прямые вычисления по формуле (34) с учетом (15) дают следующие значения нулей:

при $p_0 = 0$ МПа $\theta_1 = 0,389, \theta_2 = 2,752$;

при $p_1 = -0,1$ МПа $\theta_1 = 0,449, \theta_2 = 2,693$;

при $p_2 = -0,5$ МПа $\theta_1 = 0,672, \theta_2 = 2,470$;

при $p_3 = -1$ МПа $\theta_1 = 0,998, \theta_2 = 2,143$;

при $p_4 = -1,5$ МПа нулей нет;

при $p_5 = -2$ МПа нулей нет.

Вычислим экстремальные значения тангенциального нормального напряжения.

Уравнения (9) с учетом (32), (33) дают значения $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$. Тогда, замечая, что $\sigma(\theta_1) = \sigma(\theta_3)$, имеем

при $p_0 = 0$ МПа $\sigma(\theta_1) = -218800, \sigma(\theta_2) = 2031250$;

при $p_1 = -0,1$ МПа $\sigma(\theta_1) = -278800, \sigma(\theta_2) = 1881250$;

при $p_2 = -0,5$ МПа $\sigma(\theta_1) = -518800, \sigma(\theta_2) = 1281250$;

при $p_3 = -1$ МПа $\sigma(\theta_1) = -818800, \sigma(\theta_2) = 531250$;

при $p_4 = -1,5$ МПа $\sigma(\theta_1) = -1118800, \sigma(\theta_2) = -218750$;

при $p_5 = -2$ МПа $\sigma(\theta_1) = -1418800, \sigma(\theta_2) = -968750$.

Тогда, как нетрудно видеть, растягивающие напряжения действуют на следующих участках контура:

при $p_0 = 0$ МПа

$$\theta \in (0, 0,389) \cup (2,752, 3,531) \cup (5,894, 2\pi);$$

при $p_1 = -0,1$ МПа

$$\theta \in (0, 0,449) \cup (2,693, 3,590) \cup (5,834, 2\pi);$$

при $p_2 = -0,5$ МПа

$$\theta \in (0, 0,672) \cup (2,470, 3,813) \cup (5,611, 2\pi);$$

при $p_3 = -1$ МПа

$$\theta \in (0, 0,998) \cup (2,143, 4,140) \cup (5,285, 2\pi).$$

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$, а также на всем участке при $p_4 = -1,5$ МПа и $p_5 = -2$ МПа действуют растягивающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки эллиптической формы сечения при заданных значениях равномерного давления $p_0 - p_5$ в случае $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 5.

Случай $\mu_2 = 1$.

Формулы (4) дают

$$F_2 = -10; G_2 = 0; Q_2 = 0. \quad (35)$$

Тогда уравнение (8) принимает вид

$$2,25p\cos^2\theta - 10\gamma H - 6p = 0. \quad (36)$$

С учетом данных задачи, перепишем последнее уравнение в виде

$$2,25p\cos^2\theta - 6250000 - 6p = 0. \quad (36')$$

Тогда заметим, что уравнение (36') имеет решения при $p \in (-1666666,666 - 1041666,666)$.

При $p_0 = 0$ МПа, $p_1 = -0,1$ МПа, $p_2 = -0,5$ МПа, $p_3 = -1$ МПа на всем интервале $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения; при $p_5 = -2$ МПа — растягивающие напряжения; при $p_4 = -1,5$ МПа на участке $\theta \in (0,445, 2,697) \cup (3,586, 5,838)$ действуют растягивающие напряжения, а на осталь-

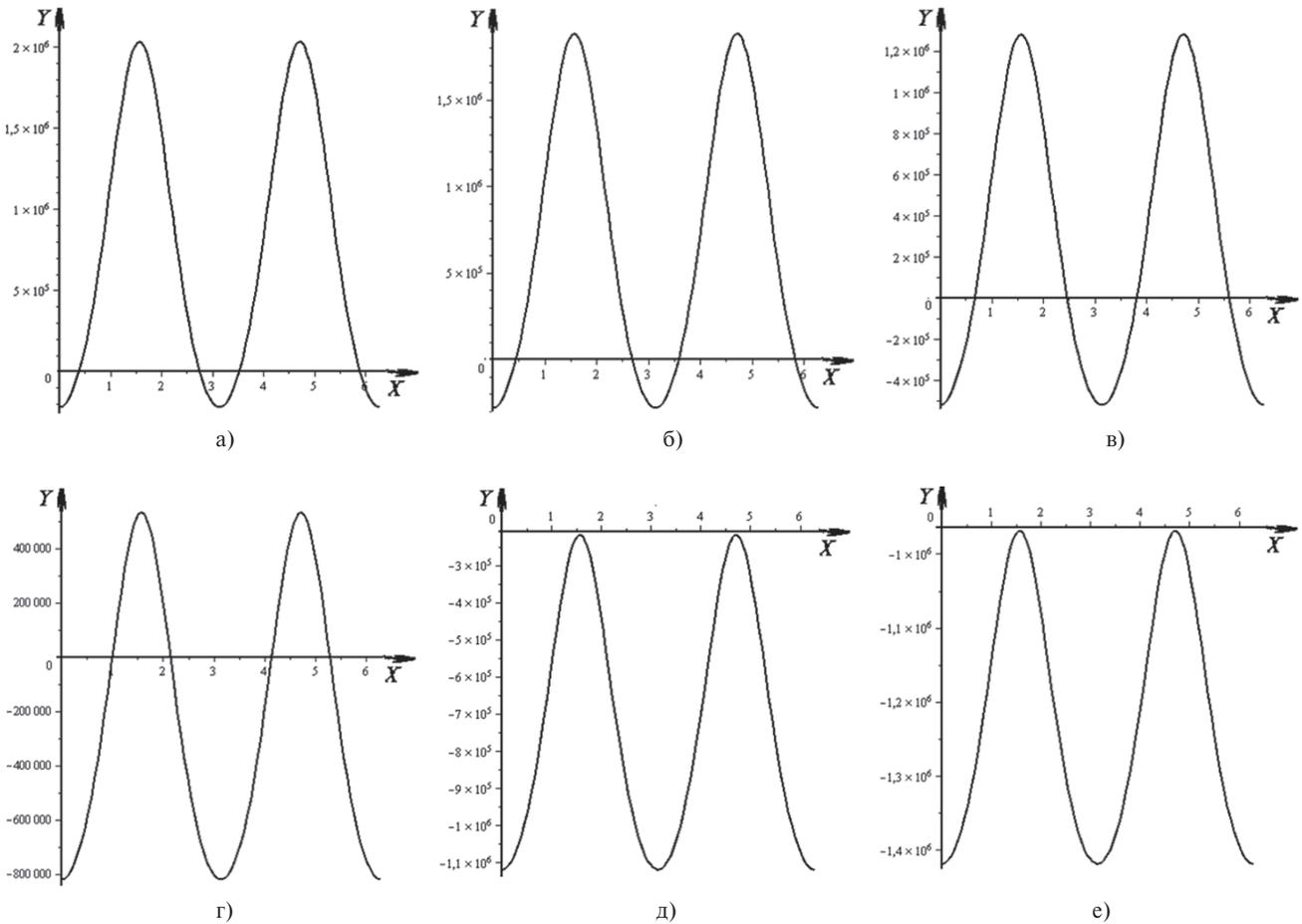


Рис. 5. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде эллипса при: а) $p_0 = 0$ МПа; б) $p_1 = -0,1$ МПа; в) $p_2 = -0,5$ МПа; г) $p_3 = -1$ МПа; д) $p_4 = -1,5$ МПа; е) $p_5 = -2$ МПа и $\mu_1 = 0,25$

ных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Вычислим экстремальные значения тангенциального нормального напряжения.

Уравнения (9) дают те же значения аргументов — $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \theta_3 = \pi$, причем, как и выше, $\sigma(\theta_1) = \sigma(\theta_3)$. Тогда имеем

- при $p_0 = 0$ МПа $\sigma(\theta_1) = 1000000, \sigma(\theta_2) = 156200$;
- при $p_1 = -0,1$ МПа $\sigma(\theta_1) = 940000, \sigma(\theta_2) = 1412500$;
- при $p_2 = -0,5$ МПа $\sigma(\theta_1) = 700000, \sigma(\theta_2) = 812500$;
- при $p_3 = -1$ МПа $\sigma(\theta_1) = 400000, \sigma(\theta_2) = 62500$;
- при $p_4 = -1,5$ МПа $\sigma(\theta_1) = 100000, \sigma(\theta_2) = -687500$;
- при $p_5 = -2$ МПа $\sigma(\theta_1) = -20000, \sigma(\theta_2) = -143750$.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки трапецевидной формы сечения при заданных значениях равномерного давления $p_0 - p_5$ в случае $\mu_2 = 1$ приведены на рис. 6.

Выводы

1. Приведенные в статье формулы для нахождения величины тангенциальных нормальных напряжений, определения их нулей и экстремальных значений на контурах выработок различной формы поперечного сечения позволяют проводить исследование напряженного состояния выработок, находящихся на заданной глубине, испытывающих равномерное внутреннее всестороннее давление при заданных физико-механических свойствах горной породы.
2. На примере выработок трапецевидной и эллиптической форм сечений при заданных значениях коэффициента бокового распора горной породы и значений равномерного давления, изменяющихся в диапазоне от 0 МПа до -2 МПа, выделены участки, на

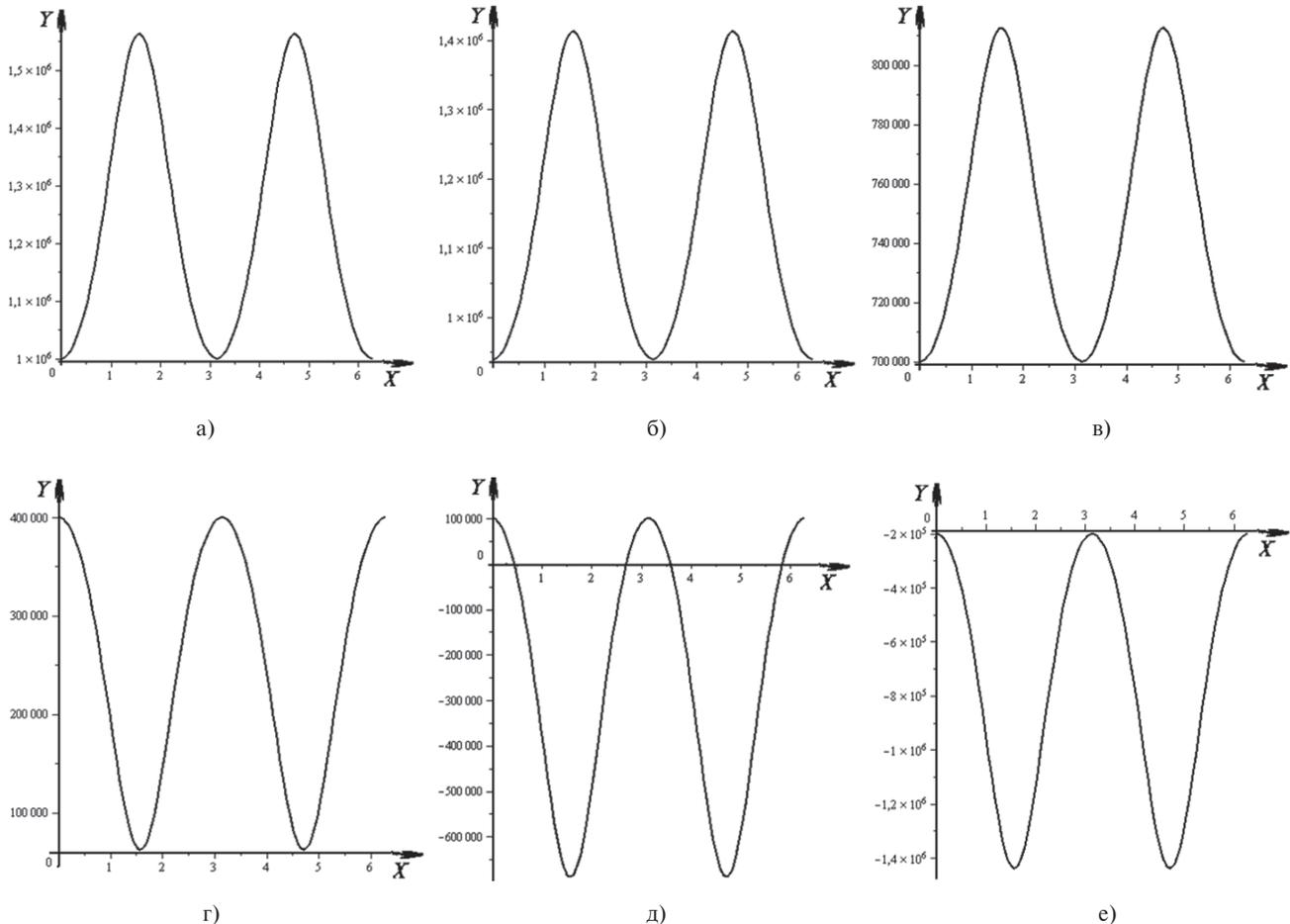


Рис. 6. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений на контуре в виде эллипса при:
 а) $p_0 = 0$ МПа; б) $p_1 = -0,1$ МПа; в) $p_2 = -0,5$ МПа; г) $p_3 = -1$ МПа; д) $p_4 = -1,5$ МПа; е) $p_5 = -2$ МПа и $\mu_2 = 1$

которых действуют растягивающие и сжимающие напряжения.

- Для рассматриваемой в работе выработки трапециевидной формы сечения при значениях давления, превышающих 3,3 МПа при $\mu = 0,25$ и 2,26 МПа при $\mu = 1$ участки, на которых действует растягивающее на-

пряжение, занимают практически весь интервал $(0, 2\pi)$, за исключением окрестности точки $\theta = \pi$; для выработки эллиптической формы сечения приведен диапазон давлений, при которых на контуре выработки при $\mu = 1$ действуют напряжения одного знака.

Литература

- Цимбаревич П.М. Механика горных пород [Текст] / П.М. Цимбаревич. — М.: Углетехиздат, 1948. — 184 с.
- Глушко В.Т. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов горных пород [Текст] / В.Т. Глушко, С.П. Гавеля. — М.: Недра, 1986. — 221 с.
- Турчанинов И.А. Основы механики горных пород [Текст] / И.А. Турчанинов, М.А. Иофис, Э.В. Каспарьян. — Л.: Недра, 1989. — 488 с.
- Бульчев Н.С. Механика подземных сооружений [Текст] / Н.С. Бульчев. — М.: Недра, 1989. — 270 с.
- Оловянный А.Г. Механика горных пород. Моделирование разрушений [Текст] / А.Г. Оловянный. — СПб.: Коста, 2012. — 280 с.
- Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л.В. Канторович, В.И. Крылов. — М.: Изд-во ГИТТЛ, 1962. — 709 с.
- Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений [Текст]: справ. рук. / П.Ф. Фильчаков. — Киев: Наукова думка, 1964. — 536 с.
- Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий [Текст] / Г.Н. Савин. — Киев: Наукова думка, 1968. — 888 с.
- Фильчакова В.П. Конформные отображения областей специального типа [Текст]: справ. рук. / В.П. Фильчакова. — Киев: Наукова думка, 1972. — 252 с.

10. Цветков В.К. Определение форм сечений горных выработок с заданными напряжениями на контурах [Текст] / В.К. Цветков // ФТПРПИ. — 1986. — № 2. — С. 24–29.
11. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок [Текст] / В.К. Цветков. — М.: Недра, 1993. — 251 с.
12. Богомолов А.Н. Методы теории функций комплексного переменного в задачах геомеханики [Текст] / А.Н. Богомолов, А.Н. Ушаков. — Волгоград: ВолгГАСУ: Перемена, 2014. — 227 с.
13. Богомолов А.Н. Определение глубины заложения горизонтальной выработки на основе анализа напряженного состояния вмещающего массива [Текст] / А.Н. Богомолов, О.А. Богомолова, А.Н. Ушаков // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 2017. — № 5. — С. 2–9.
14. Богомолов А.Н. О напряжениях в контурных точках одиночных подземных выработок различного поперечного сечения, подверженных вестороннему равномерному давлению [Текст] / А.Н. Богомолов, О.А. Богомолова, А.Н. Ушаков // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. — 2018. — Т. 9. — № 3. — С. 54–70. — DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06.
15. Евтушенко С.И. Современные методы расчета фундаментов [Текст] / С.И. Евтушенко, А.Н. Богомолов, А.Н. Ушаков, С.И. Шиян // Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ); Волгоград. гос. арх.-строит. ун-т. — Новочеркасск: Изд-во ЮРГТУ (НПИ), 2011. — 238 с.

References

1. Tsimbarevich, P.M. *Mekhanika gornykh porod* [Mechanics of rocks]. Moscow: Ugletekhizdat Publ., 1948. 184 p.
2. Glushko V.T. *Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya massivov gornykh porod* [Evaluation of the stress-strain state of rock massifs]. Moscow: Nedra Publ., 1986. 221 p.
3. Turchaninov I.A. *Osnovy mekhaniki gornykh porod* [Basics of rock mechanics]. L.: Nedra Publ., 1989. 488 p.
4. Bulychiev N.S. *Mekhanika podzemnykh sooruzheniy* [Mechanics of underground structures]. Moscow: Nedra Publ., 1989. 270 p.
5. Olovyannyy A.G. *Mekhanika gornykh porod. Modelirovanie razrusheniy* [Mechanics of rocks. Simulation of destruction]. St. Petersburg: Izdatel'sko-poligraficheskaya kompaniya «Kosta» Publ., 2012. 280 p.
6. Kantorovich L.V. *Priblizhennyye metody vysshego analiza* [Approximate methods of higher analysis]. Moscow: GITTL Publ., 1962. 709 p.
7. Fil'chakov P.F. *Priblizhennyye metody konformnykh otobrazheniy* [Approximate methods of conformal mappings]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1964. 536 p.
8. Savin G.N. *Raspredelenie napryazheniy okolo otverstiy* [Stress distribution around the holes]. Kiev: Naukova dumka Publ., 1968. 888 p.
9. Fil'chakova V.P. *Konformnyye otobrazheniya oblastey spetsial'nogo tipa* [Conformal mappings of domains of a special type]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1972. 252 p.
10. Tsvetkov V.K. *Opreделение form secheniy gornykh vyrabotok s zadannymi napryazheniyami na konturakh* [Determination of the forms of mine workings with given stresses on the contours]. ФТПРПИ [ФТПРПИ]. 1986, I. 2, pp. 24–29.
11. Tsvetkov V.K. *Raschet ratsional'nykh parametrov gornykh vyrabotok* [Calculation of rational parameters of mine workings]. Moscow: Nedra Publ., 1993. 251 p.
12. Bogomolov A.N. *Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo v zadachakh geomekhaniki* [Methods of the theory of functions of a complex variable in problems of geomechanics]. Volgograd: VolgGASU Publ., «Peremena» Publ., 2014. 227 p.
13. Bogomolov A.N. Opreделение glubiny zalozheniya gorizontally'noy vyrabotki na osnove analiza napryazhennogo sostoyaniya vmeshchayushchego massiva [Determining the depth of horizontal generation based on the analysis of the stress state of the host array]. *Osnovaniya, fundamentey i mekhanika grunтов* [Grounds, foundations and soil mechanics]. 2017, I. 5, pp. 2–9.
14. Bogomolov A.N. O napryazheniyakh v konturnykh tochках odinodnykh podzemnykh vyrabotok razlichnogo poperechnogo secheniya, podverzhennykh vvestoronnemu ravnomernomu davleniyu [About stresses at the contour points of single underground workings of various cross-sections, subject to all-round uniform pressure]. *Vestnik PNIPI. Stroitel'stvo i arkhitektura* [Bulletin of the PNRPU. Construction and architecture]. 2018, V. 9, I. 3, pp. 54–70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06.
15. Evtushenko S.I. Sovremennyye metody rascheta fundamentov [Modern methods of calculating the foundations]. *Yuzhno-Rossiyskiy gosudarstvennyy tekhnicheskiy universitet (NPI)* [South Russian State Technical University (NPI)]. Novocherкасск: YuRGU (NPI) Publ., 2011. 238 p.