

# Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей

УДК: 624.07

## Пережилова Екатерина Дмитриевна

Студентка кафедры Робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин ФГБОУ ВО Национальный исследовательский университет «МЭИ», 111250 (г. Москва, ул. Красноказарменная, 14); e-mail: katyaperezhilova@mail.ru

**Аннотация:** Представлен аналитический расчёт деформации балочной фермы, имеющей одну неподвижную опору, другую — подвижную. Нагрузка распределена равномерно по узлам верхнего пояса. Аналитическое выражение для смещения в зависимости от числа панелей, размеров и нагрузки получено методом индукции. Усилия в стержнях определяются методом вырезания узлов. Смещение опоры вычисляется по формуле Максвелла- Мора. Сравниваются различные схемы крепления конструкции. Используется система Maple.

**Ключевые слова:** расчёт, ферма, смещение опоры, индукция, усилия, формула Максвелла- Мора

## THE EXACT SOLUTION OF THE PROBLEM OF DISPLACEMENT OF THE MOVABLE SUPPORT OF THE TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

### Perezhilova Ekaterina Dmitrievna

Student of the chair "Robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines" National research University "MPEI", 111250 (Moscow, Krasnokazarmennaya str, 14); e-mail: katyaperezhilova@mail.ru

**Annotation.** The analytical calculation of the deformation of the braced truss, which has one fixed support and the other movable, is presented. The load is distributed evenly on the upper belt. The analytical expression for the displacement depending on the number of panels, dimensions and load obtained by the method of induction. The forces in the rods are determined by cutting out the knots. The deflection is calculated by the Maxwell - Mohr's formula. The comparison of different schemes of fixing the truss is done. The system Maple is used.

**Key words:** calculation, truss, displacement, induction, forces, Maxwell - Mohr's formula

Плоские балочные фермы широко применяются в строительстве и машиностроении. Легкие, прочные, недорогие фермы обеспечивают себе эксплуатационное преимущество. Рассмотрим плоскую статически определимую ферму балочного типа с произвольным числом панелей  $n$ . В верхнем поясе фермы применены укороченные элементы длиной  $a$ , повышающие критическую нагрузку потери их устойчивости при сжатии и позволяющие более равномерно распределить нагрузку по узлам. В нижнем (растянутом) поясе нет необходимости в укороченных стержнях. Здесь применены стержни длиной  $4a$ . Найдем смещение левой подвижной опоры. Это смещение может возникать не только по причине температурных деформаций стержней фермы, но и из-за действующей нагрузки, обычно равномерно распределенной по узлам верхнего пояса. Выведем аналитическую зависимость смещения опоры фермы от числа панелей. Рассмотрим случай расположения опор на нижнем поясе (рис. 1, схема 1). Используем программу [1], реализующую метод вырезания узлов в символьной форме в системе аналитических преобразований Maple [2], и метод индукции [3-6]. Этот метод применяется в самых разнообразных задачах, содержащий целочисленный параметр, задающий число ячеек периодичности. Метод используется для оценки жесткости торсионных подвесок [7] и для расчета фундаментов [8]. В работах [9-11] исследовались пространственные фермы. В [12] дан обзор различных аналитических решений для плоских ферм.

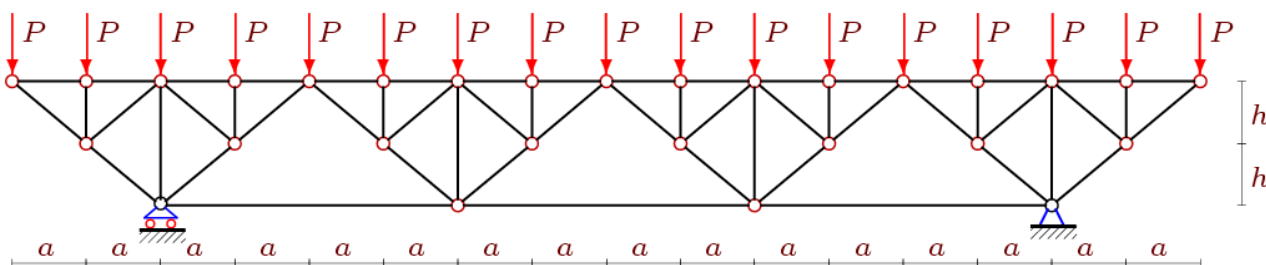


Рис. 1. Ферма. Схема опор 1,  $n=4$

Расчёт усилий в стержнях фермы можно осуществить методом вырезания узлов. Пронумеруем узлы и стержни фермы (рис.2).

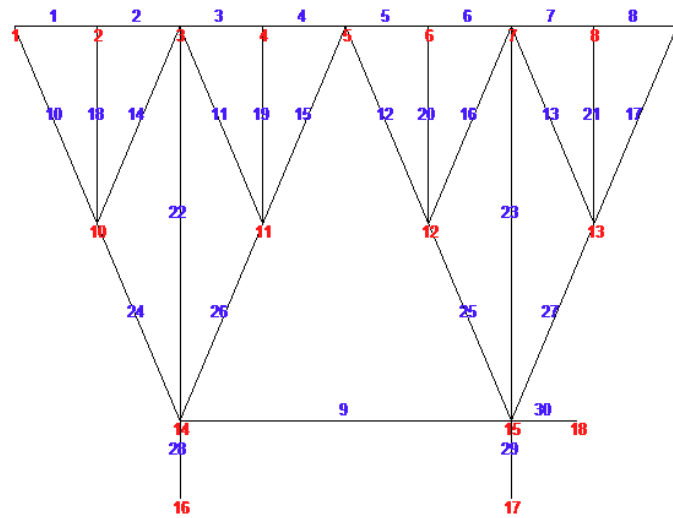


Рис. 2. Данные о номерах стержней и узлов,  $n=2$

Этот фрагмент программы (на языке системы Maple) имеет вид:

```
> for i to 4*n+1 do
    x[i]:=(i-1)*a; y[i]:=2*h;
od:
> for i to 2*n do
    x[i+4*n+1]:=(i-1)*2*a+a;y[i+4*n+1]:=h;
od:
> for i to n do
    x[i+6*n+1]:=i*4*a-2*a; y[i+6*n+1]:=0;
od:
```

Смещение вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i N_i l_i / (EF),$$

где  $S_i$  — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки  $P$ ,  $N_i$  — усилия в стержнях от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к подвижной опоре,  $l_i$  — длины стержней,  $EF$  — жесткость стержней. Число стержней фермы с опорами:  $m = 14n + 2$ . Опорные стержни считаем жёсткими.

Решаем задачи для ферм с увеличением числа панелей: 2,3,...,11. С помощью оператора `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` находим рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательностей коэффициентов в выражении для прогиба. Для решения рекуррентного уравнения и получения искомого результата следует применить процедуру `rsolve`. Проанализировав полученные последовательности решений 10 ферм по методике для плоских и пространственных ферм, выведем формулу:

$$EF\Delta = 2Pa^2(4n^3 - 12n^2 + 5n + 3) / (3h) \quad (1)$$

Рассмотрим иное крепление конструкции с приподнятыми от нижнего пояса опорами, часто применяемое для увеличения пролета (рис. 3).

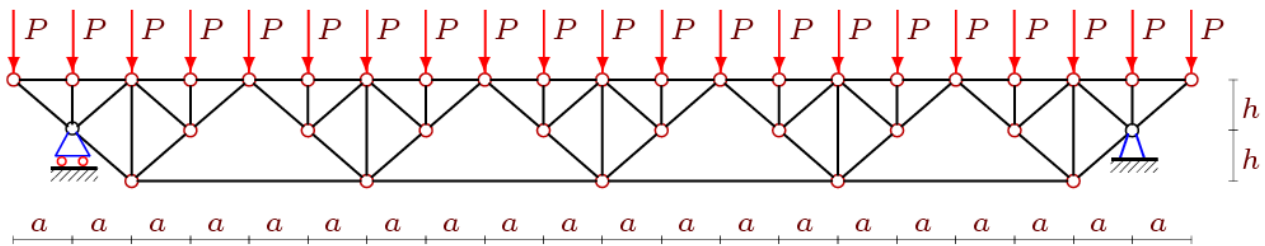


Рис. 3. Схема опор 2, при  $n=5$

Применяя тот же алгоритм, получим следующее выражение для смещения

$$EF\Delta = P(A_n a^3 + 2c^3 + B_n h^3) / (2ah), \quad (2)$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  — длина раскосов. Коэффициенты в этом выражении получены из решения достаточно простых рекуррентных уравнений вида

$A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2}$  оператором `rsolve` и имеют вид

$$A_n = 2(1 - n), B_n = 4n - 7.$$

Для коэффициента  $B_n$  рекуррентное уравнение получается таким же как и для  $A_n$ , различие только в начальных данных.

На рисунке 4 построены графики зависимости безразмерного смещения  $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$  от высоты фермы, где  $P_s = (4n + 1)P$  — фиксированная суммарная нагрузка,  $L = 4an = 60\text{м}$  — длина пролета,  $n = 4$ .

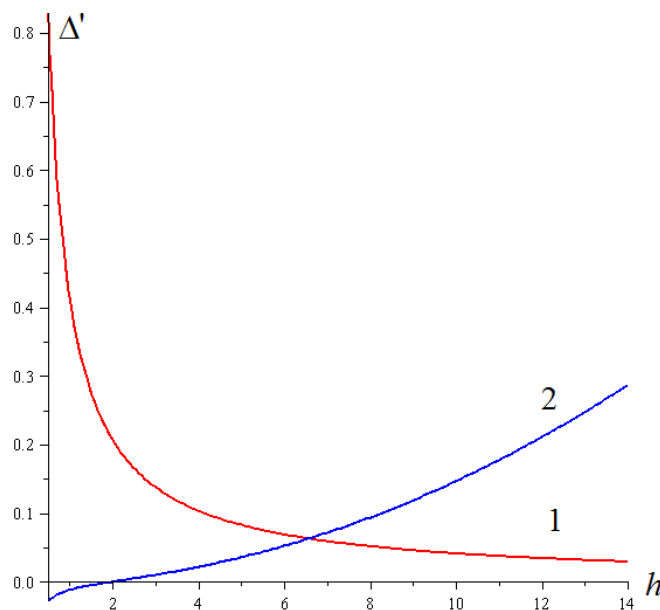


Рис. 4. Зависимость смещения опоры от высоты фермы  $h$ .

1— схема опор 1, 2— схема опор 2

Заметим принципиально разный характер кривых. Для опор по схеме 1 (рис. 1) с увеличением высоты смещение падает. В схеме же 2 (рис. 3) смещение растет. Экстремальные точки (обычные в таких случаях [10]) не

обнаружены. Кривая 1 имеет очевидную горизонтальную асимптоту  $\lim_{h \rightarrow \infty} \Delta' = 0$ .

У кривой 2 методами Марле определяется параболический рост

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Delta'}{h^2} = \frac{2(4n^2 - n - 5)}{L^2(4n + 5)}.$$

Основное значение найденного решения, однако, не зависимость смещения от размеров фермы, а зависимость от числа панелей. Здесь два решения также ведут себя по разному (рис. 5).

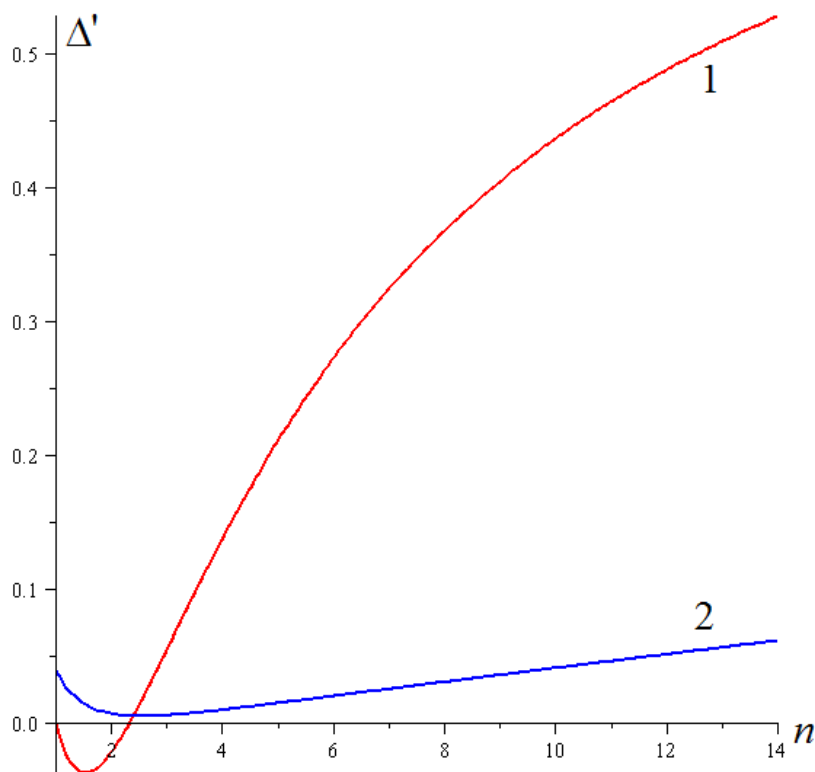


Рис. 5. Зависимость смещения опоры от числа панелей.

1— схема опор 1, 2— схема опор 2

Для крепления 1 имеем горизонтальную асимптоту, ограничивающую

решение сверху:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' = L / (24h)$ . Крепление опор по схеме 2 соответствует линейному на бесконечности (в рамках сделанного предположения о постоянстве пролета и нагрузки) росту с наклонном асимптоты

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = 2h^2 / L^2$$

### Список цитируемой литературы

1. Кирсанов М. Н. *Maple и MapleT. Решения задач механики*. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
2. Голоскоков Д.П. *Практический курс математической физики в системе Maple*. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
3. Тиньков Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М: Инфра-М, 2015. Т.1. С. 52-56.
4. Кирсанов М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 33-41.
5. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арокного типа // *Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова*. 2015. № 3(31). С. 42-48.
6. Кирсанов М.Н. Математическая модель балочной фермы с элементами упрочнения // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. №4(56). С. 38-44.
7. Кирсанов М.Н. Жесткость торсионной подвески микромеханического волнового твердотельного гироскопа // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*. 2015. № 3. С. 18–22.
8. Кирсанов М.Н. Дискретная модель свайного фундамента // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. №3(55). С. 3–9.
9. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // *Известия Московского государственного технического университета МАМИ*. 2014. Т.4. №2(20). С. 36-39.
10. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // *Инженерно-строительный журнал*. 2013. №5(40). С. 52-58.

11. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
12. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.

#### **References:**

1. Kirsanov M.N. *Maple and Maplet. Reshenie problem mehanici [Solving problems of mechanics]*, Saint-Peterburg Lan Publ., 2012, 512 p. (in Russian)
2. Goloskokov D. P. *a Practical course in mathematical physics in the Maple system*. SPb.: Publishing house of Parccom, 2010. 644 p.
3. Tinkoff D. V. *analysis of the influence of the fixing conditions for the deflection of a flat beam farm with down braces // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. M: Infra-M, 2015. Vol. 1. Pp. 52-56.
4. Kirsanov M. N. *The exact formulas for calculating deflection and stresses in the bars of the model farm "Molodechno" with an arbitrary number of panels // magazine of civil Engineering*. 2016. No. 1(61). Pp. 33-41.
5. Kirsanov M. N. *Analytical study on deformations of flat farm arch type // Bulletin of state University of sea and river fleet them. Admiral S. O. Makarov*. 2015. No. 3(31). Pp. 42-48.
6. Kirsanov M. N. *A mathematical model of a girder with elements of strengthening // Magazine of Civil Engineering*. 2015. No. 4(56). Pp. 38-44.
7. Kirsanov M. N. *The stiffness of the torsion bar suspension of a micromechanical solid-state wave gyro // Devices and systems. Management, control, diagnostics*. 2015. No. 3. Pp. 18-22.
8. Kirsanov M. N. *Discrete model of pile Foundation // Magazine of Civil Engineering*. 2015. No. 3(55). Pp.3-9.
9. Kirsanov M. N. *Accounting for construction hoist in the analytical calculation of the spatial girder beam // Bulletin of Moscow state technical University MAMI*. 2014. Vol. 4. No. 2(20). Pp. 36-39.



10. Kirsanov M. N., Andrew T. M. *analysis of the influence of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment //Magazine of Civil Engineering. 2013. No. 5(40). Pp. 52-58.*
11. Kirsanov M. N. *Bending, torsion and asymptotic analysis of spatial rod console // Magazine of Civil Engineering. 2014. No. 5 (49). P. 37-43.*
12. Tinkoff D. V. *Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures //Magazine of Civil Engineering. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73.*